

量子纠缠理论

陈泽乾

数学物理实验室

- 一、国家战略需求和世界科技前沿分析
- 二、研究所核心竞争能力分析（国内外比较）
- 三、研究所发展目标（科技）

1、前沿分析

自从二十世纪二十年代中期量子力学的基本理论形成以来，对于量子纠缠的研究就一直是量子理论基本问题研究的重要课题。量子力学的创始人以其深刻的洞察力提出了 EPR 佯谬和 Schrödinger 猫态，预示了量子理论的基本问题未来的发展方向，量子纠缠理论正是在这一方向上产生的。其中，量子纠缠态已成为当代量子理论的一个关键性概念，在量子信息技术中有重要的应用，其研究是当前量子理论的一个前沿热点方向。量子纠缠理论的发展将为量子信息技术的打开广阔的应用前景。

早期对量子纠缠态表现出来的量子非局域性的研究大多是停留在哲学层次上的探讨，直到 1964 年 Bell 提出著名的 Bell 不等式，才使得量子纠缠态的非局域性可以通过实验来验证。Bell 不等式也成为在实验上对量子纠缠态可操作的第一个数学判别准则。利用 Bell 不等式，大量设计精巧的实验支持了量子力学关于量子纠缠态的非经典关联——量子非局域性的预言。这类实验是在上个世纪八十年代初取得成功的，其中许多实验靠激光技术的发展才有可能进行。进行这种实验当时只是出于理论上的考虑，是为了想看一看量子纠缠态有多么奇怪的物理属性。但由这个目的出发，结果却使包括物理学家在内的许多人大吃一惊，物理学家自己也惊奇地发现，他们已经以这种方式为新技术的发展奠定了基础。这些新技术以诸如量子计算、量子通讯等名称而崭露头角，其基本的概念是以量子的方法来处理并传输信息。从 1984 年第一个量子加密协议的提出到 1991 年它的实验实现；从 1985 年量子计算机理论模型的提出，1994 年 Shor 大数分解算法的提出和 1996 年 Grover 搜索算法的提出到 1998 年它们的核磁共振（NMR）实验演示；从 1993 年量子隐形传态方案的提出到 1997 年的首次试验实现，量子信息与量子计算这一跨学科的交叉研究领域在过去二十多年中的发展已从星星之火到了燎原之势，带来了当代科学技术可能的最大变革。

随着量子信息技术的迅猛发展，作为它的重要基础之一的量子纠缠态的定性和定量研究很自然地也是很迫切地被提到了议事日程上来。这方面的研究是很广泛的，既有理论上的又有实验上的问题，既有物理方面的也有数学方面的探讨，它们相互融合相互促进，形成了当代量子理论中的一个重要研究方向。但是，迄

今为止，量子纠缠态仍然还有很多理论问题没有解决，制约着实验工作的进程。这些理论问题中有很多是直接的数学问题，比如，量子纠缠态的分类和可操作判别法，最大纠缠态的数学刻画以及量子纠缠态的定量描述等。发展相应的数学理论来刻画量子纠缠态，尤其是提出在实验中可操作的数学判别法已经成为量子信息技术发展的当务之急。

量子纠缠的数学研究可以追述到 1906 年德国数学家 Schmidt 的工作，那时量子纠缠态的概念还没有提出来（甚至量子力学的基本理论都没有形成）。为了研究抽象积分方程，Schmidt 将两体 Hilbert 空间中的向量作了一个普适的分解，这就是著名的 Schmidt 分解定理。在后来的量子纠缠理论中，Schmidt 分解给出了两体纠缠纯态的准确描述。这是迄今为止，量子纠缠态的数学描述中解决得最好的一种情形。虽然量子纠缠态的概念于上世纪三十年代就已由 Schrödinger 提出，但是它的准确的数学定义到上世纪八十年代末才由德国数学物理专家 Werner 给出。由于量子通讯的提出和试验实现，上世纪九十年代出现了研究量子纠缠态的高潮。以美国物理学家 Bennett 为首的一批科学家（包括物理学家、数学家和计算机科学家）对量子纠缠态的分类进行了深入的研究，提出了 LOCC 分类、渐进 LOCC 分类和随机 LOCC 分类等理论。在量子纠缠态的可操作判别法方面，人们给出了若干形式的 Bell 型不等式违背判别法、Peres 的部分转置判别法和 Horodecki 等人的约化判别法等少数成功的范例。而对于量子纠缠态的定量描述则有形成纠缠度、提纯纠缠度和相对熵纠缠度等等。然而，所有这些成果，都是要么对于两体系统适用要么对于低维系统解决得比较好，而对于多体的和高维的情形则往往失效或者很难计算而变得没有意义。解答这些问题需要新的思想和方法。

我们拟从 Bell 不等式和 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 定理出发研究量子纠缠态的数学刻画和量子非局域性问题。我们主要从概率论的角度研究各种形式的函数关联、概率关联以及方差和矩关联等的 Bell 型不等式及其违背问题，获得在物理实验中可操作的纠缠态的数学判别法；研究多体量子体系隐变量描述的确定性违背的 GHZ 定理，获得多体和高维体系的最大纠缠态的一般性数学刻画。因此，该课题围绕在理论上具有重要物理背景在应用上乃当代量子信息技术急需解决的数学问题开展研究，是很有意义的研究课题。

参 考 资 料

1. J.S.Bell, On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox, *Physics*, vol.1, 195-290, 1964.
2. A.Einstein, B.Podolsky, and N.Rosen, Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys.Rev.*, vol.47, 777-780, 1935.
3. N.Gisin, G.Ribordy, W.Tittle, and H.Zbinden, Quantum cryptograph, *Rev.Modern Phys.* vol.74, 145-195, 2002.
4. D.M.Greenberger, M.A.Horne, and A.Zeilinger, Going beyond Bell's theorem, In: M.Kafatos(ed.), *Bell's theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe*, Kluwer Academic Publisher, 69-72, 1989.
5. 郭光灿，量子信息引论，*物理*，第 30 卷第 5 期，286-293，2001.

6. M.Horodecki, Entanglement measures, *Quantum Information & Computation*, vol.1, no.1, 3-26, 2001.
7. R.F.Werner and M.M.Wolf, Bell inequalities and entanglement, *Quantum Information & Computation*, vol.1, no.3, 1-25, 2002.
8. N.D.Mermin, Hidden variables and the two theorems of John Bell, *Rev.Modern Phys.* vol.65, 803-815, 1993.
9. M.Nielsen and I.Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000.
10. 曾谨严, 裴寿镛, 龙桂鲁 主编, **量子力学最新进展**, 第一辑, 北京大学出版社, 2000; 第二辑, 北京大学出版社, 2001; 第三辑, 清华大学出版社, 2003.

2、研究现状

在国内比较系统开展量子纠缠理论研究的单位有中国科大、中科院理论物理所、首都师大数学系和中科院武汉物理与数学所等单位。公平地说,在国内这些单位这些年出了不少论文,其中也不乏好的工作,但是还没有那种令人振奋、在国际上产生重要影响的工作。举例来说,对于纠缠态的可操作性判别法有不少论文研究这个问题,却没有一个完整地解决了比如最基本的量子位体系的纠缠态的判别问题,甚至三体量子位体系的问题都没有解决(充分必要条件)。另一个引人注目的是纠缠态的度量,这个问题除了早期在两体系统有一些重要进展外,多体问题几乎停滞不前,尽管在这方面国内外发表了不少论文。从应用的角度来说,纠缠态的度量也许更为重要,但是从理论研究角度来讲,纠缠态的可操作性判别法是更为基本的问题,这方面没有本质的进展,我们是不可能量子纠缠态的定性和定量方面取得重要突破的。这个问题的实质就是我们如何准确地理解纠缠态的涵义,包括量子测量、量子非局域性和物理实在性等由来已久的基本理论问题。问题的任何实质性进展都需要新的思想和方法。从当前量子信息技术的发展状况来看,科学界似乎到了解决或者部分解决这个问题的边界。

3、研究问题

对于量子纠缠态的理论研究,内容上有抽象刻画和可操作性判别之分,在数学上有代数、几何和概率论等方法。抽象刻画侧重于对量子纠缠态的定性分析,在这方面主要采用代数和几何方法利用某些不变量和度量来对量子纠缠态进行分类。在实验中可操作性的判别法主要有 Bell 型不等式的违背和约化判别法等。在这里,我们要特别强调 Bell 不等式的作用,它与概率论有着紧密地联系。这个问题最早在物理上是与所谓量子非局域性问题相关的。

早在 1935 年,爱因斯坦与波多尔斯基和罗森(EPR)对量子力学的完备性提出了质疑,他们用反正法给出了一个例子来说明量子力学是不完备的,它联系着量子非局域性问题。他们给完备性赋予了一个很直接的含义,即在完备的理论中每个物理实在元都有一个相应的量来描述。他们并没有给出物理实在元的一般性定义,但给出了一个充分条件来判断一个物理量是否为物理实在元:如果在不去扰动一个系统的情形下,我们能够确定地(即以概率为 1)预料一个物理量的值,那么一定存在一个物理实在元对应着这个物理量。这就是所谓 EPR 的实在性。

我们用 Bohm 给出的一个简化形式来说明其要点。考虑两个自旋都为 $1/2$ 的粒子，它们处于粒子 1 上旋粒子 2 下旋和粒子 1 下旋粒子 2 上旋的叠加态（现在称为 Bell 态）。量子力学告诉我们，当测量到粒子 1 上旋时粒子 2 必下旋，测量到粒子 1 下旋时粒子 2 必上旋。假设两个粒子反向飞行相距很远，分别对粒子 1 和粒子 2 作测量，于是，只要对它们的分别测量的时刻足够靠近，这两次测量所构成的两个事件将是互不影响的。若对粒子 1 测量得到上旋，则可以肯定地推断粒子 2 是下旋。按照 EPR 的实在性观点，因为我们没有对粒子 2 产生任何干扰就能确定地预料它自旋向下，粒子 2 的自旋向下是一个物理实在元。因此，粒子 2 下旋是它自身的一个性质，与我们对粒子 1 的测量没有关系，它必定是来自于两个粒子相互作用的那一点，分开时刻就是下旋的。同理，若测量得到粒子 1 下旋，则粒子 2 上旋。粒子 2 上旋与我们对粒子 1 的测量没有关系，它必定是在分开的时刻就是上旋的。

但是，量子力学否定这种简洁的观点。按照量子力学的观点，直到对粒子 1 测量之前，粒子 2 的自旋是不确定的，它处于上旋和下旋的叠加态上，在原理上人们在对粒子 1 测量时对粒子 2 的上旋或下旋的可能性可以有干涉——量子非局域性——幽灵般的超距作用（爱因斯坦语）。这就是著名的爱因斯坦和玻尔之间论战的焦点。在 1964 年之前，人们还无法对这两种观点的差异进行可能的实验检验。但就在这一年，Bell 证明了他的著名的定理：如果人们在各个方向上对粒子的自旋作测量，粒子自旋的实在性假设对粒子之间可能存在的关联有一定的限制，这种限制可以用一个不等式——Bell 不等式来描述，它可以被量子力学违背。用数学的语言讲，人们可以根据实在性假设建立经典概率模型来描述粒子的自旋，两个粒子自旋的关联函数满足 Bell 不等式；此时，Bell 定理说的是，经典概率模型不能包括所有量子力学描述的情况。

这种 Bell 不等式的量子违背源于 Bell 态是一个纠缠态。量子纠缠是存在于两体以上量子体系中的一种量子属性。现在，这种量子属性已证明可以用于量子密钥分配、量子密集编码、量子隐形传态、量子纠错码和量子计算等诸多方面，是量子信息超越经典信息的力量源泉。一个自然的问题是如何获得在实际中可操作的纠缠态的判别法。可以想见，第一个有效的判别法就是 Bell 不等式。在理论上已经证明，经典 Bell 不等式的一种推广形式——Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) 不等式可以给出两体量子位体系的纯态是否为纠缠态的准确判别：一个纯态为纠缠态当且仅当它违背 CHSH 不等式。这就是 Gisin 定理。（以后我们讲到态都是指纯态，讲混合态时会特别指出。）遗憾的是，业已证明目前已知的各种 Bell 型不等式不能给出三体以上的 Gisin 定理。（最近有人给出一个三体量子位体系的概率关联的 Bell 型不等式，数值模拟表明 Gisin 定理对三体量子位体系成立，但没有给出数学证明。）特别是，现在还没有一个普遍适用的多体量子位体系纠缠态的可操作判别法。我们的第一个研究内容和目标就是要获得这种数学判别法。

最近，我们结合 Wigner-Yanase 信息给出了一个 Bell 型不等式。这种不等式不同于通常的 Bell 型不等式，不是线性的而是二次的。但是，它在每个位置只有一个局域 spin 可观测量，且对两体量子位体系 Gisin 定理成立。这是一个新的迹象，为寻找 Gisin 型定理，我们不一定要局限于线性形式的 Bell 型不等式，可以考虑其他的形式。值得指出的是，从数学上看，通常的 Bell 型不等式都是考虑可观测量的期望值。我们得到的 Wigner-Yanase 信息的 Bell 型不等式事实上考虑的是方差（纯态情形）。这提醒我们，我们可以考虑可观测量的方差和矩等有

明显概率论意义的 Bell 型不等式。这种思路，对于混合态也应该是有效的。这样，我们就可以脱离传统的要从 EPR 局域实在性角度来获得 Bell 型不等式的思路。从本质上讲，满足 EPR 局域实在性与非纠缠态是有区别的，并不是等价的概念。我们要获得的是在量子态中区别纠缠与非纠缠的判别法，它可以表述为一个纯粹的数学问题，并不依赖 EPR 局域实在性。直接从概率论的角度考虑也许更接近事物的本质。当然，反过来，这也会加深我们对量子非局域性的认识。

另一个我们要研究的主要问题是所谓最大纠缠态的数学刻画问题。人们公认 Bell 态和 GHZ 态 (GHZ=Greenberger-Horne-Zeilinger, 下同) 都是最大纠缠态，因此，任何关于最大纠缠态的定义都应该把它们包含在内。遗憾的是，迄今为止人们还没有给出一个能被普遍接受的关于最大纠缠态的数学定义。在以前的尝试中，对于两体量子体系，有一个定义说，如果一个量子态的两个边缘分布都是最大混合的，那么它称为最大纠缠态。但是，这个定义不能推广到多体量子体系。另外，这个定义事实上是利用了最大纠缠态的高度脆弱性，它应当看作是强关联性的一个从属性质。因此，作为定义来说，它并没有给出最大纠缠态的最本质的属性，因而不能推广到一般的多体情形是自然的事情。另一个用于最大纠缠态的判断的是 Bell 型不等式。通常认为，最大纠缠态应该最大地违背 Bell 型不等式。因为 Bell 型不等式有各种各样，Bell 型不等式本身就是不完善的。因此，用 Bell 型不等式的最大地违背作最大纠缠态的数学定义是不合适的，至少不是一种简洁的方式。特别是，对于两体高维量子体系，存在混合态最大地违背 Bell 不等式。然而，对于特殊的量子体系，一类已知的 Bell 不等式的最大地违背确实可以确定一类量子态。在多体量子位体系中，最大地违背 Bell-Klyshko 不等式的量子态只有 GHZ 态。由此，我们得到一条思路，似乎可以用 GHZ 试验给出最大纠缠态的数学定义：在一个多体量子体系中，满足 GHZ 定理的量子态称为最大纠缠态。一个例外的情形是两体量子位体系，然而这种情形的最大纠缠态早有定论，就是 Bell 态，我们的定义是否包含它并不重要。这样，我们就确立了 GHZ 定理与最大纠缠态的内在联系。为了要确定最大纠缠态，我们要做的就是确定物理上可实现的 GHZ 试验。

然而，只有在少数几类量子体系中人们才获得了相应的 GHZ 定理。事实上，三体量子位体系的 GHZ 定理的数学形式直到 2004 年才由申请者给出证明。(两体量子位体系没有 GHZ 定理的数学证明是申请者 2003 年证明的)。虽然其他情形已有一些特殊结果，但高维和多体的 GHZ 定理的一般数学形式并不清楚，没有相应的数学证明。为此，我们来看一看 GHZ 定理的确切含义，到底说了什么。根据 Mermin 对 GHZ 原先形式的简化形式，GHZ 定理说的是一组完备的非局域可观测量有一个公共特征态使得它们在这个态上的取值与用 EPR 的实在性观点给出的结论是矛盾的，这种矛盾只需要一次检验就可以确定！因此，从概率论角度讲，GHZ 定理说的是我们只需要一次抽样就可以得知量子力学预言的结果不能用 EPR 的实在性观点解释。这自然比 Bell 不等式给出的量子力学违背要强，它要多次抽样后，取统计平均（期望）得出量子力学预言的结果不能用 EPR 的实在性观点解释。这样，能用于 GHZ 定理中的量子态要比 Bell 不等式的要少。事实上，我们要确定的是，在每一类多体系统中除去一个局域酉变换外，只有一个态满足这种要求。这就是我们要定义的最大纠缠态。除此之外，我们自然还需要用其他方式来检验其合理性，比如，达到某种（些）纠缠度量的最大，最大地违背某个（些）Bell 不等式，特别是，希望其逆也成立。这在多体量子位体系中我们用 Bell-Klyshko 不等式已经给出了证明。

我们上面讨论的都是针对纯态而言的，混合态的问题更为复杂。我们希望这些思路也能对混合态给出一些端倪。总之，总的目标是，我们拟解决如下主要问题：

- 1、结合 Wigner-Yanase 信息提出若干好的 Bell 型不等式。
- 2、获得多体量子位体系纠缠态的准确判别法。
- 3、获得多体量子位体系的一般形式 GHZ 定理。
- 4、给出若干最大纠缠态的数学刻画。
- 5、研究信息论的公理体系并应用于量子测量问题。
- 6、从更基本的层次，探讨量子非局域性的基本问题。

最终，我们希望该课题研究能从数学的角度澄清常见的若干量子体系的纠缠态的非经典关联的确切含义。

4、研究方法

我们拟采取的研究方法是：

一方面，在量子纠缠态的判别和分类方面，该研究从一开始就引起了广泛的重视，取得了一些很好的结果。但是这些结果大多都是对于两体的和低维的系统，比如，Schmidt 定理、转置判别法和两体量子位的 Gisin 定理等。如何将这些结果推广到多体和高维情形一直是引人注目的问题。这些问题即使对多体量子位体系也没有得到很好地解决。以往尝试过的方法似乎不能解决这些问题，需要新的思想和方法。最近，我们发现了一个用 Wigner-Yanase 信息表述的 Bell 型不等式，它可以给出一个类似的两体量子位的 Gisin 定理，而且可以提供多体纠缠态的一个分类，这种分类比以前用二次 Bell 不等式给出的分类要精确一些。Wigner-Yanase 信息是可观测量的方差形式。因此，我们将主要采用方差和矩等概率论中有重要意义的量来描述可观测量的关联。循着这条路线，我们可能找到一些好的量子纠缠态的判别方法，特别是我们希望借此给出第一个关于多体量子位体系的纯态的准确的判别法，即获得多体量子位体系的 Gisin 定理。

另一方面，在 GHZ 定理和最大纠缠态方面，我们已经做了一些好的工作。我们将继续深入研究这方面的问题，这主要是所谓最大纠缠态的数学刻画问题。人们公认 Bell 态和 GHZ 态都是最大纠缠态，因此，任何关于最大纠缠态的定义都应该把它们包含在内。遗憾的是，迄今为止人们还没有给出一个能被普遍接受的关于最大纠缠态的数学定义。GHZ 定理的数学内涵是，只需要一次抽样就可以得知量子力学预言的结果不能用 EPR 的实在性观点解释。由此，从概率论的观点，我们可以用 GHZ 试验给出最大纠缠态的数学定义：在一个多体量子体系中，满足 GHZ 试验的量子态称为最大纠缠态。这样，我们就确立了 GHZ 定理与最大纠缠态的内在联系。为了要确定最大纠缠态，我们要做的就是确定物理上可实现的 GHZ 试验的数学内涵。我们已经完成了在三体量子位体系的数学证明，希望这种方法能推广到其它高维和多体的量子体系。

最后，我们还将在混合态方面顺着上述思路开展工作，找到好的数学判别法和最大混合态的数学刻画。这方面研究依赖在纯态方面工作的程度。

5、特色与创新

本课题所研究的内容是目前物理学令人关注的问题。这方面的研究是很广泛的，既有理论上的又有实验上的问题，既有物理方面的也有数学方面的探讨，它们相互融合相互促进，形成了当代量子理论中的一个重要研究方向。但是，迄今

为止，量子纠缠态仍然还有很多理论问题没有解决，制约着实验工作的进程。这些理论问题中有很多是直接的数学问题，比如，量子纠缠态的分类和可操作判别法，最大纠缠态的数学刻画以及量子纠缠态的定量描述等。发展相应的数学理论来刻画量子纠缠态，尤其是提出在实验中可操作的数学判别法已经成为量子信息技术发展的当务之急。因此，本课题的特色是在理论上重要的物理背景在应用上是当代量子信息技术急需解决的数学问题。

量子纠缠理论是一个交叉研究领域。在数学方面，它与代数、几何和概率都有密切联系。代数和几何的方法侧重于量子纠缠态的定性分析，概率论方法对于可操作性判别法有重要意义。本课题的研究将重点采用概率论方法。我们将主要采用方差和矩等概率论中有重要意义的量来描述可观测量的关联。循着这条路线，我们可能找到一些好的量子纠缠态的判别方法。在此基础上，我们希望给出纠缠态的标准度量。

我们的主要创新之处在于，用方差和矩等有明确概率论含义的量来描述可观测量的关联，获得量子纠缠态的数学判别法。以前使用的大多或者是期望值或者是概率关联，都是线性量。在本项目中我们将把此方法发扬光大，拟从 Bell 不等式和 GHZ 定理出发研究量子纠缠态的数学刻画和量子非局域性问题。我们将主要从概率论的角度研究各种形式的函数关联、概率关联以及方差和矩关联等的 Bell 型不等式及其违背问题，获得在物理实验中可操作的纠缠态的数学判别法；研究多体量子体系隐变量描述的确定性违背的 GHZ 定理，获得多体和高维体系的最大纠缠态的一般性数学刻画等。

6、基础和条件

本课题所在单位中科院武汉物理与数学研究所是国内最早开展量子信息与量子计算方面工作的少数单位之一，既有试验方面的又有理论方面的研究。从一开始各方面的人员就在一起探讨量子信息方面的交叉研究，形成了我们的特色。

近两年，我们在国际权威物理学杂志、美国物理学会主办的《物理评论 A》连续发表三篇量子纠缠理论的论文，特别是，2004 年又在国际最重要的物理学权威刊物《物理评论快报》发表了一篇关于最大纠缠态的数学刻画的论文。这反映我们的研究已进入了国际前沿水平。我们的前期工作（见申请人简历附后）主要是在 GHZ 定理、最大纠缠态的数学刻画和结合 Wigner-Yanase 信息的 Bell 型不等式等方面。2003 年我们从数学上严格证明了在两体量子位体系中 GHZ 定理不成立；2004 年证明了三体量子位体系的 GHZ 定理的一般数学形式，得到了如下结论：对于三体量子位体系最大违背 Bell 不等式的量子态与满足 GHZ 试验的量子态是一致的，都是 GHZ 态及其局域酉等价形式；特别是 2004 年我们还从数学上严格证明了多体量子位体系的最大纠缠态就是 GHZ 态，从理论上确立了物理学家对这个问题的猜测。今年，我们完成了一篇关于 Wigner-Yanase 信息的 Bell 型不等式的论文，该文用方差来描述可观测量的关联，为 Bell 型不等式的研究开辟了新的思路，已在《物理评论 A》上发表。所有这些都为我们进一步开展量子纠缠理论方面的研究工作奠定了基础。

7、节点目标

我们在量子纠缠理论方面的研究已经起步，可以直接进入所计划的研究课题；所拟定的进度和预期成果如下：

第一年我们重点研究结合 Wigner-Yanase 信息的 Bell 型不等式。在这方面，

我们完成了一个工作，最近在 Phys.Rev.A 上发表，它是关于多体量子位体系的。这是用方差和矩等有明确概率论含义的量来描述可观测量的关联的一个 Bell 型不等式。我们将循着此线路研究高维和其他多体的情形，可望获得好的结果。特别是，我们希望藉此给出第一个关于多体量子位体系的纠缠纯态的准确的判别法，即获得多体量子位体系的 Gisin 定理。

第二年我们要围绕 GHZ 定理和最大纠缠态开展工作。我们已经证明三体量子位体系的 GHZ 定理的数学形式，由此给出了 GHZ 态是三体量子位体系的唯一最大纠缠态的数学证明。我们将把此结果推广到高维和其他多体的情形，给出若干多体的一般形式 GHZ 定理，特别是要获得多体量子位体系的一般形式 GHZ 定理。

第三年我们的重点要转向混合态和宏观量子态的相应问题研究。关于混合态的判别法是国际上令人关注的重要问题。混合态的可操作性判别目前只有对两体量子位体系和 2×3 体系找到了充要条件，至今没有突破性进展。我们希望前述用方差和矩等有明确概率论含义的量来描述可观测量的关联获得的纯态判别法对混合态的研究提供新的思路，获得相应的结果。

后两年希望研究信息论的公理体系并应用于量子测量问题，从更基本的层次，探讨量子非局域性的基本问题。