

# 波动方程一种“独立”形式的提出 与

## 恰当定解问题的合理构造

—— 理性重构电磁场理论体系形式逻辑分析之三

杨本洛

上海交通大学自然科学基础研究组，上海 200240

Email: [blyang@sjtu.edu.cn](mailto:blyang@sjtu.edu.cn)

**摘要：**通过揭示一般波动方程的物理内涵以及形式上的耦合特征，本文提出波动方程一种新的独立形式，相应为其构造了一个恰当的定解问题，并讨论该数学模型的可解性问题。

**关键词：**波动方程，双旋度算子，存在性、可解性

### 1. 引言

面对无尽的大自然，人类的认识永远只可能在“批判之批判”的循环往复中得以逐步深化；并且，可以相信：不断趋于理性层次的认识深化过程同样永无止境。一个半世纪前，由于 Maxwell 引入“位移电流”这样一个纯粹的人为假设，客观上为人们猜测电磁波的合理存在提供了可能。但是，随着人类计算能力的提高，人们渐渐明白：经典的 Maxwell 基本方程组数学上其实是不可解的；进一步说，由其构造的“波动方程”充其量只能计算 1 维传输线中的电磁波传递问题，或者仅仅用以分析“无穷大空间域”中均匀电磁场由于“点源扰动”所激发电磁扰动传播的问题。<sup>[1]</sup>

因此，除了需要重新检讨物理学陈述中一种纯粹“人为约定”的存在是否真正合理，或者需要对物理学陈述系统中某个“不容省略”却不知道什么是它的“物质内涵”的形式量，重新考虑如何为其提供必要的“物质内涵”问题以外，还值得首先从纯粹形式逻辑的角度的出发，认真反思与“波动方程”相关的数学基础是否恰当与完善的问题。<sup>1</sup>

### 2. 关于波动方程的习惯表述是否具有“普适性”意义的反思

在涉及数学物理方程的经典理论中，波动方程属于一类极其重要的微分方程。此处，首先大概介绍目前经典理论对于波动方程的通常认识。在一本名为《波动理论》专门描述各种波动现象的著述中，著者特地指出：作为具有某种特定形式的数学表述，波动方程能够也必须用来描述所有的波

<sup>1</sup> 需要充分重视人类认识中的“循环反复”以及伴随于认识反复而逐次“深化认识”的历史真实。为此，或许不妨值得向人们介绍《量子多体理论 —— 从声子的起源到光子和电子的起源（文小刚，高等教育出版社，2004）》一书引言最后写的一段话：“根据物理学历史上的经验，我们敢保证现有的物理理论没有一个是正确的，问题是要找到现在的理论错在哪里，又该如何去修正。在此我们需要想象和启发。”自觉承认或揭示自然科学中认识不足的真实存在，无疑具有积极意义。但是，绝对“虚无主义”的论述难免“危言耸听”与“否定一切”之嫌；而且，根本问题还在于：对于过去的全盘否定，逻辑上必然对未来任何可能的修正同样做出彻底否认。其实，全盘否定过去只是虚幻的表象，本质意图则是迎合现代“约定论”普遍泛滥的思潮，公然宣扬将自然科学研究寄托于“想象和启发”一种纯粹“人文主义”主张，从而对自然科学必需的“实体论”基础与“形式逻辑”支撑构成完全否定。然而，人们总可以坚信：人类对于理性的追求不可能终止于 20 世纪，自然科学体系一定能够在“承继性批判和批评性继承”中得以持续健康发展。但是，无论是“承继性批判”还是“批评性继承”都应该首先真正读懂期望“承继或批判”的经典论述，而真正读懂前人的书并不容易，特别是与那种崇尚“想象和启发”的研究方式相比无疑艰难得多，需要化大的力气。

动现象。进一步说，只有如下所示的双曲型二次偏微分方程

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

才可能称之为波动方程。其中，如果  $f(\mathbf{x}, t)$  所表述的“非齐次源项”不恒等于零，相应表示此时存在某种扰源。<sup>[2]</sup>

众所周知，仅仅从某一个特定“形式表述”出发建立全部相关理论体系的做法，大致符合于目前自然科学研究习惯认同的主要研究方法。事实上，将式(1)所示的数学表述明确界定为“波动方程”一般性定义的做法，同样被《数学百科全书》这样一些更具广泛影响的工具书所使用，将其称为“描述各种振动过程和波的传播过程”的方程，从而被赋予人们期待的“普适性”意义。<sup>[3]</sup>

此处，如果不考虑定义于“无穷大域”中相对过分简单的所谓 Cauchy 问题。那么，为了满足物理学陈述通常需要的“唯一性”条件，仅仅有式(1)所示的泛定方程尚不足以求解波动问题，还需要补充恰当定解条件的问题。除了与波动方程中与“时间导数算子  $\partial^2/\partial t^2$ ”相匹配，并且具有一般意义的初始条件

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = \phi(\mathbf{x}) \\ u_t(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = \psi(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2)$$

以外，式(1)所示的波动方程还需要满足恰当的边界条件

$$\mathbf{n} \cdot \nabla u + bu + c = 0, \quad u(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \partial V \quad (3)$$

显然，对于此处所述边界条件的恰当形式，仍然根本决定于出现在波动方程中的特定“空间导数算子”即 Laplace 算子  $\nabla^2$  的形式。

事实上，正如讨论定义于某个空间域线性微分方程“积分表述”时实际看到的那样，如果一个恰当数学模型中的泛定方程几乎总和“待定函数的二次空间导数”相关，那么，边界条件则和“该待定函数的一次空间导数”相关，从而在“边界条件”的恰当表述形式与泛定方程某种形式的“积分表述”之间隐含特定的逻辑关联。因此，即使由 Laplace 算子构造的波动方程能够视为刻画波动现象的“一般性”形式表述，但是，考虑到不同微分方程可能对应于形式上彼此不同的边界条件，起码可以做出合理的逻辑推断：由于不能保证与不同形式的边界条件匹配，由式(1)所示波动方程所构造的数学物理模型不一定真实存在；进而，求解这个特定数学模型也无从谈起。（反过来说，这同样相合于以往论述已经提到，经典电磁场理论体系中的波动方程之所以出现“无法求解”现象的数学原因。）

其实，或许更能说明式(1)定义的波动方程并不具有“普适性”意义的直接证据在于：姑且不论相关“几何空间”的定义域以及不同空间域中“导数算子  $\nabla$ ”的具体分量形式的不同，弹性力学在探讨“杆”或“板”的运动学特征时，早已出现类似于如下所示的波动方程<sup>[4]</sup>

$$\nabla^4 \eta + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

显然，弹性力学中的这个波动方程无法为式(1)替代。而且，切切不要忘记，即使局限于本系列论文所关心的电磁场理论问题，只是使用“正则规范”这样一个纯粹的“人为约定”才可能拼凑出与式(1)大体一致的波动方程。实际上，一旦涉及“动态电磁场”或“电磁波”问题，需要首先面对的数学表述形式是

$$\nabla \times \nabla \times \Psi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mathbf{f} \quad (5)$$

这样,如果不使用一个对“演绎逻辑”本质上构成完全否定的“正则规范”,经典电磁场理论同样不可能得到式(1)所示的波动方程。人们熟知:逻辑的本质内涵只可能表现为“同义反复”。依据最基本的逻辑常识,仅仅凭借逻辑永远不可能告诉人们任何超越逻辑前提的东西。于是,如果某个人为约定被赋予某种“独立”的实质性内涵,那么,这个人为约定的提出对演绎逻辑已经构成否定;相反,如果某个人为约定没有任何“实质性”的独立内涵,那么,该约定相应蜕化为“空言性”陈述,可以重新把这个人为约定从逻辑推理过程中取消。

自然科学是描述“自存”物质世界的。因此,即使仅仅从“形式逻辑”的角度考虑,自然科学体系中任何一个形式系统无论怎样合理,它依然只可能逻辑地隶属于某一个特定的“理想化”物质对象。同样,式(1)所示的波动方程即使可以被视为一个合理的数学表述,能够通过其内蕴的函数关系对某一类“波动现象”做出合理描述,但是,这种描述或内蕴的函数关联仍然必须逻辑地隶属于与其对应的某一类特定的“波动对象”之上。一个特定的形式表述或者由形式表述描述的性质特征,需要以逻辑地拥有这种性质的“物质主体”的存在而存在。作为一个素朴的理性判断:性质永远只可能从属于拥有该性质的逻辑主体的存在而存在;没有“物质主体”的前提存在,任何形式描述的个性特征也逻辑地不复存在。毫无疑问,式(1)所定义的波动方程同样不允许违背这样一种普遍而素朴的理性判断,不允许被以一场纯粹“想当然”的方式被无条件地“形式固定化”和“普遍真理化”。事实上,正因为对某种“特定属性”以及拥有这种属性“逻辑主体”之间确定“逻辑从属关系”上的认识颠倒,现代自然科学中的一些陈述系统在陷入“机械、固定、僵化和过分简单”的形而上学之中同时,同样陷入彻底的“逻辑紊乱”之中。

必须牢牢记住:自然科学仅仅是描述物质世界的。面对“无穷无尽、充满差异和复杂性”的大自然,需要为不同的形式表述系统自觉地探询“逻辑前提”和“有限论域”的问题,切切不要轻言谈论“无穷真理”这样的命题,努力探究形式表述后面的那个“独立”于人类主观意志而存在的“客观”世界。当然,此处论述物质世界的波动现象时,同样需要允许和正视不同形式波动方程的真实存在,并且,努力探询不同波动方程蕴含的不同确定物质内涵。

### 3. 波动方程的“耦合”特征与“实体论”本质

无需也不能把数学上的某一个特定形式表述视为一成不变的形而上学,相反必须努力培养一种自觉的理性意识:任何一个看似“绝对合理”的数学表述,本质上仍然只可能“条件”存在,仅仅适用于某些“特定”场合,或者总存在一个对其构成制约的“有限”论域。<sup>2</sup>

此处,仍然从纯粹形式逻辑的角度出发,首先考虑《数学百科全书》针对“波动方程”所做解释中隐含的某些看起来微不足道的认识不当。该书在名为“波动方程”的条目中,特地使用较为抽象的现代数学语言,对由式(1)所示波动方程构造的“初值问题(Cauchy问题)”做出如下所示的诠释

波动方程 Cauchy 问题的经典解 是描述  $n$  维 Euclid 空间  $E^n$  中波的传播的函数  $u(x, t)$ 。

它在  $n+1$  空间  $\{x \in E^n, t \geq 0\}$  中连续可微,在半空间  $\{x \in E^n, t > 0\}$  中二阶连续可微,……

对于熟悉现代数学中“抽象空间”语言的研究者,此处的陈述无疑十分简单和自然。并且,人们始终可以相信:努力使用较为抽象的现代数学语言,不妨可以视之为伴随于概念的抽象化,对于相关数学描述的认识同样愈益深刻和准确。也就是说,概念的抽象化并不仅仅用来显示知识的高深,根本目的在于为相关理念赋予更具“严谨性”的抽象内涵。事实上,一旦提出此处所说“ $n+1$ 空间  $\{x \in E^n, t \geq 0\}$ ”这样一个“整体性”概念,那么,在逻辑上必然预示一个拥有特定“几何结构”的抽

<sup>2</sup> 从人类自身的“思维实践(主观)”过程考虑,必然遵循“从简单到复杂”这样一种“逐步扩张”规律;但是,如果从“思维对象(客体)”之间的逻辑关联考虑,则必须严格满足“定义域从复杂到简单”的“逆向约束”关系。其实,正因为没有真正澄清和分辨这样两个看似简单然而在逻辑上却至关重要的概念,才可能导致诸如 M. Kline 在《古今数学思想》一书所述,包括“如何逻辑地看待从自然数到有理数、无理数、虚数的扩张过程”在内的许多认识矛盾至今仍然困扰着人们。因此,数学上存在的所有逻辑不当问题,仍然需要使用逻辑的工具加以解决;并且,只要逻辑推理是真正逻辑的,那么,数学上任何逻辑不当问题的解决并不存在本质困难。

象空间的“整体”存在；进而，当进一步提及这个抽象空间中的函数需要满足“连续可微”条件的时候，它必然像现代微分几何（尽管该《百科全书》此处的论述只涉及作为一般弯曲空间特例的平直空间）所描述的那样，必须逻辑地存在隶属于该抽象空间的“梯度”算子： $\nabla \ll R^{n+1}$ 。<sup>3</sup>毫无疑问，这个属于特定抽象空间的“不变性”微分算子，只可能逻辑地决定于该抽象空间“自身”蕴含的几何结构。与此同时，对于定义于该抽象空间中一切连续可微函数而言，该梯度算子允许并且必须能够在一种“整体”意义上刻画相应的“空间变化”特征。

显然，基于“ $n+1$ 空间  $\{x \in E^n, t \geq 0\}$ ”抽象概念的“前提”存在，而指出必然存在“空间梯度算子 $\nabla$ ”逻辑推论是一个“虚假”命题。于是，根据形式逻辑最简单的逻辑判断，那个需要被视为某个几何结构整体的“ $n+1$ 空间  $\{x \in E^n, t \geq 0\}$ ”的逻辑前提“必然”不存在。也就是说，在《数学百科全书》中，将波动方程（1）所描述的标量函数定义在“ $n+1$ 空间  $\{x \in E^n, t \geq 0\}$ ”之中，实际上是一个隐含逻辑悖论的不当数学命题。相反，对于波动方程所描述的标量函数，它的一个恰当形式定义只能是

$$u(\mathbf{x}, t): \mathbf{x} \in V \subset R^3, t \in R \quad (6)$$

因此，从“形式逻辑”角度考虑，为波动方程所描述的函数  $u(\mathbf{x}, t)$  可以形式地视为属于两个不同“定义域”的两个独立函数： $u(\mathbf{x})$  和  $u(t)$ 。但是，从“物理描述”的角度考虑，由于它们逻辑地“同属于”一个相同的物理实在，两个函数在物理上并不真正独立，共同构造了一个数学上始终处于“耦合”之中而物理上则同属一个物理实在的函数。

其实，正如在所有物理学分析中人们实际承认的那样，当几何点  $\mathbf{x}$  需要当作为函数的“独立”变量，相应考察函数在“几何空间”呈现的变化规律时，时间  $t$  自动地降格化为参变量，所描述的只不过是函数  $u(\mathbf{x}, t)=u(\mathbf{x})$  在某一个特定时刻  $t=t'$  的空间分布；同样，允许把时刻  $t$  界定为自变量，而空间点  $\mathbf{x}$  自然蜕化为参变量，此时的函数  $u(\mathbf{x}, t)=u(t)$  用以描述物质场与某一个特定空间点相对应时在“时间域”中呈现的变化特征。于是，对于式（1）所示的波动方程，本质上隐含一对处于“耦合”之中，分别形式地定义在“空间域”中的微分方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) = g \quad \mathbf{x} \in V \subset R^3 \quad (7)$$

与定义在“时间域”之中的另一个微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = h \quad t \in R \quad (8)$$

一般情况下，定义于“空间域和时间域”函数  $g$  和函数  $h$  时刻处于变化之中，通常“无法也无需”直接写出这两个函数的具体形式。正因为此，式（7）和式（8）所示的形式分解仅仅具有抽象的“示性”意义，并不意味着这种“形式分解”在“显式”意义上必然存在。

尽管如此，做出一种严格符合逻辑的分析仍然具有实际意义。实际上，本质上正归结为“时间”和“空间”在形式逻辑上必需的“独立”意义，以及它们在“物理理念”上完全对应于两个不具“可比性”的物理实在：时钟和直尺，这样，才可能为 Einstein 曾经为他的“相对论”以一种“极为自然和充分合理”的方式所引入的一对“原时（proper time）”和“钢尺（rigid ruler）”概念，提供能满足逻辑相容性要求的“理性”依据。与此同时，仍然渊源于完全相同的简单道理，在自然科学所有涉及“场分析”的相关形式表述中，几乎总是自然地属于 3 维空间  $R^3$  的梯度算子 $\nabla$  和定义于时间域  $t$  的时间导数算子 $\partial/\partial t$  看作逻辑上必须自动满足“独立性”要求、而在物理上相应被赋予“不变

<sup>3</sup> 需要注意：在“集合论”中，逻辑符号“ $\ll$ ”仅仅用以表示“集合中的某确定元从属于该集合”这样一种特定的逻辑关联。显然，它与此处所讨论“性质和实体之间的逻辑隶属”关系完全不同，故而有意识地代之以符号“ $\ll$ ”。其实，一切科学疑难只不过意味着认识中出现了矛盾而已，而解决一切“逻辑悖论”的武器依然是逻辑，只不过需要人们甚至不无苛刻地维护逻辑必需的“严密性”罢了。

性客观内涵”的两个微分算子，成为支撑所有现代“场分析”的必要形式基础。无疑，这些以“物理实在”为基础的陈述不仅仅完全符合于“逻辑”，而且是“素朴和自然”的。正因为此，从来没有一个研究者对这些“场分析”中被普遍应用基本原理提出任何疑义。<sup>4</sup>

同样，本质上仅仅因为波动方程(1)逻辑地隐含式(7)和式(8)所示的两类不同微分方程，所以所有不同的数理方程理论著述在分析波动方程“定解问题”的时候，从来没有花费力气认真讨论过如何为波动方程构造恰当“边界条件”的问题。实际上，几乎总是“默认”或凭借一种“直觉意识”上的默契：能够用于式(7)所示 Laplace 方程的恰当边界条件，理应自动地适用于式(1)的波动方程。殊不知，数学分析中的一切看似“合理”的简单结论，仍然需要具备“逻辑严谨性”的必要支撑。相反，正由于对某些看似过分简单“细节”的疏忽，才导致电磁场的“动态分析”需要面对式(5)这样的形式表述，以及需要为其提供恰当边界条件的时候必然会变得不知所措，最终出现“动态电磁场数学上无法求解”的不当断言。

作为一种特例，如果波动方程(1)能够取“齐次”形式，则可以将式(7,8)中的函数  $g$  和  $h$  看成定义于“时间域和空间域”中的“同一”函数。也就是说，对于式(1)定义的波动方程，可以形式地视为分别定义于空间域和时间域的两个不同微分方程之间的一种耦合

$$\begin{cases} -\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) = k(\mathbf{x}, t) & t = t', \mathbf{x} \in V \subset R^3 \\ \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = k(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} = \mathbf{x}', t \in R \end{cases} \quad (9)$$

并且，如果考虑到定义于两个不同“定义域”的不同微分方程通常需要满足的“自封闭性”要求，那么，对于式中的函数  $k(\mathbf{x}, t)$  而言，往往还允许进行一种“显式”分解，定义为“时间函数”和“空间函数”乘积的形式。反过来讲，逻辑地依赖于这样一种形式分解，还可以将波动方程的定解问题形式地视为以“时间  $t$ ”为参量、定义于“空间域”之中并且“无以穷尽”个边值问题

$$\begin{cases} -\nabla^2 u^*(\mathbf{x}, t) = k(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in V \subset R^3 \\ \mathbf{n} \cdot \nabla u^* + bu^* + c = 0 & \mathbf{x} \in \partial V \end{cases} \quad (10)$$

需要注意，该定解问题中的待定函数  $u^*$  与原来的待定函数  $u$  必然存在某种逻辑关联，但两者并不简单同一。与此同时，相应存在以“几何点  $\mathbf{x}$ ”为参数，定义于“时间域”之中并且同样“无穷多”个初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^{**}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t) & t \in R \\ u^{**}|_{t=0} = \phi, u^{**}|_{t=0} = \psi \end{cases} \quad (11)$$

当然，这些初值问题中的待定函数  $u^{**}$  同样不同于以上定义的函数。事实上，熟习微分方程数值计算的研究者几乎立即看出：数值求解微分方程定解问题时候，正是这样的形式分解为经常使用的“分离变量法”提供了必要的逻辑基础。

毫无疑问，此处所述充其量不过是人们早已“默认”的简单事实。然而，人们需要注意，真正科学的其实必然是简单、自然和严格符合逻辑的。或者说，问题还往往在于：改变抽象性必然意味着神秘性的认识不当，努力昭示一些看似简单的基本事实，对于摆脱把某种特定形式表述形式形而

<sup>4</sup> 此处，值得引用一位本意在于维护现代“约定论”思潮的“主流”职业数学工作者，在名为《爱因斯坦与数学》的文章中陈述了这样的事实：“如果说，提出狭义相对论，爱因斯坦的数学知识还算够用的话，到了广义相对论，爱因斯坦则捉襟见肘，不得不求助于他的同学。不可否认，爱因斯坦学这一套数学颇为吃力，以至于一次自嘲道：自从数学家搞起相对论研究之后，我自己就不再懂它了。”（参见《中华读书报》，2005, 11, 30）事实上，根据“历史唯物主义”的科学认识论，自然科学研究中许多科学疑难的出现具有“客观性”基础，根本决定于“人类认识时代水平”的限制。因此，为什么要苛求数学工具尚未建立的前人，并且拒绝使用逻辑批判的武器，将经典理论简单地视为一成不变的形而上学呢？

上学化的不良习惯，以及构造恰当的数学物理模型恰恰具有重要意义。

此外，自然拥有毋庸置疑“权威”影响的《数学百科全书》一书，一方面习惯于使用“高维空间”这样一些现代数学中的抽象语言，另一方面却只是引入如下所示一种“过分陈旧”的“分量形式”表述定义波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \quad \in R^{n+1} \quad (12)$$

事实上，编著者并不理性地懂得：这个形式表述在“形式和内涵”之间实际上处于一种尖锐冲突之中。同样，此处之所以特地指出原则上不允许使用式(12)所示的分量形式取代式(1)使用“整体张量”为波动方程构造的形式定义，并不仅仅在于强调“形式本身”的重要性，而在于需要敏锐意识到两种不同形式表述在“本质内涵”上可能隐含的重大差异。一般著述在使用式(12)所定义的波动方程时，通常总会提醒人们注意：式中关于 Laplace 算子 $\nabla^2$ 的“分量表述”形式只允许适用于直角坐标系。但是，一个远比“可以随意使用任何一种坐标系工具”更为本质的问题在于：任何一个不变性微分算子必须定义于特定几何空间之中，算子的形式表述只能逻辑地依赖于几何空间“自身”的抽象结构，相应被赋予属于几何空间的“客观性”基础。因此，类似于此处需要处理的物质场波动现象，随着涉及“几何空间”或物质场“几何特征”的不同，已经不仅仅是式(12)使用的特定“分量表述”形式只允许用于“直角坐标系”的问题，而是同样需要“实体论”支持的不变性 Laplace 算子在某些特定问题之中可能“不复存在”的问题。正因为此，讨论宏观物质“小扰动”分别在“3维空间域”和“2维曲面”传播时，不仅空间导数算子的在不同坐标系中的“分量表述”形式存在差异，而且它们的“抽象内涵”已经发生重大变化。

因此，在需要重视式(7,8)揭示波动方程在逻辑上隐含某种“耦合特征”的同时，人们同样需要密切关注式(1)所定义波动方程真实存在的“实体论”基础。用以描述某种特定波动现象的形式表述只可能条件地存在，或者只能逻辑地依赖于某个特定“物质场”的前提存在而存在，不允许视为一成不变的形而上学。事实上，任何合理数学表述必须的“实体论”基础，相当于这个数学表述得以合理存在所必需“支撑和限制”的辩证统一。无尽的物质世界，真实存在着不同形式的“物质场”。由于不同物质场的物理内涵存在重大差异，人类不得不为这些不同真实存在的物质场构造不同形式的波动方程。

毫无疑问，正是一切合理科学陈述共同需要的“实体论”基础，以及作为特例的波动方程将时间域和空间域“耦合”起来的“个性”特征，为此处即将提出的一种波动方程“独立”形式的合理存在提供了“逻辑上”的可靠前提。<sup>5</sup>

必须承认：数学的全部核心内涵仅仅在于如何严格保证“逻辑相容”的问题。符合逻辑的必然是自然的、容易为人们理解和接受。蓄意制造抽象，似乎越晦涩难懂就越高深只是与“逻辑”背道而驰，最终走向“理性”的反面。如果说，对于向量场乃至张量场分析中的一些基本数学概念，初学者觉得比较抽象，那么，也只是因为它们需要描述的“抽象实体”真的比较复杂的缘故。但是，只要能够将“形式表述”与其描述的“抽象实体”形成必要的逻辑关联，那么，这些概念不再晦涩、同样是生动、自然和容易理解的。事实上，如果说 Kline 诚实地指出现代数学体系大量矛盾的普遍存在，以至于几乎完全放弃“逻辑严谨性”的时候，那么，始作俑者正是 Kline 所颂扬“约定论”的随意杜撰。从形式逻辑的角度考虑，自然科学必需的“实体论”不仅仅为合理陈述提供了“客观性”的基础，同样也为相关陈述提供了一个“客观性”的约束，从而使得隶属于不同“物理实在”的不同科学陈述可能处于严格逻辑相容之中。

#### 4. 双旋度波动方程的“存在性”和“可解性”问题的辩证统一

<sup>5</sup> 一个形式逻辑上合理的数学表述是否具有真实的科学价值，最终仍然本质地依赖于是否存在某种理想化的物理实在，能够与其保持一致。

可以相信,自然科学研究“承继性批判和批评性继承”的辩证统一,同样需要被视为一种“客观性”的规律,它并不依赖于不同研究者的不同“主观意志”而转移。事实上,只有采取“严厉审视”的态度,才可能“真正读懂”期待“继承”的经典理论;反过来,必须首先“真正读懂”经典理论,才可能谈得上“真正合理”地批判经典理论中由于人类认识的“时代局限性”而必然存在的不足、不当乃至错误,从而彻底摆脱因为“猜测和想象”而必然造成的逻辑紊乱,将属于“整个人类——绝不仅仅属于西方世界”的自然科学研究重新纳入“理性——逻辑”的道路。在这个意义上,针对《数学百科全书》所反映的习惯性认识,使用严格逻辑的方法进行深刻反思和严肃批判几乎是必需或不能回避的。与此同时,努力寻找不同著述在同一科学命题的论述可能存在的细微差异,则可能为人们解决科学难题带来有益的启示。

不难发现:在自然科学中,任何不当陈述往往总隐含“循环逻辑”的问题。同样,在《数学百科全书》中,一方面将式(1)所示的形式表述认定为“普适的”波动方程,另一方面又借助这个特定的形式表述定义波动现象,使得整个理论体系事实上处于“循环逻辑”之中。与此同时,正因为物理上缺乏特定“物质内涵”的支撑和限制,形式上又几乎必然会演变为“一成不变”的形而上学。然而,与《数学百科全书》的陈述不同,在另一本同样具有相当大影响的《McGraw-Hill 物理百科全书》中,则将波动方程定义为“描述物理量对空间和时间依赖关系”的一类偏微分方程。这样,从形式逻辑的角度考虑,不仅避免了“循环定义”的问题,而且形式上能够与式(7,8)所揭示波动方程隐含的“耦合”特征更为贴切。

于是,根据《McGraw-Hill 物理百科全书》给予波动方程的解释或定义,以及根据式(7,8)所示波动方程的耦合特征,只要在给定“空间域”中真实地存在某一个恰当的泛定方程,在逻辑上总可以由这个泛定方程构造出一个同时定义于“时间域和空间域”之上的波动方程。基于完全相同的道理,考虑到存在一个经典微分方程理论至今没有充分注意到,仅仅属于空间域、但是并且必须逻辑地定义于矢量势  $\Psi$  自身、上而不仅仅是定义于矢量势旋度  $\nabla \times$  之上的“恰当”泛定方程

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \Psi(\mathbf{x}) = \varrho \end{cases} \quad \mathbf{x} \in V \subset R^3 \quad (13)$$

那么,该空间域中的恰当微分方程必然能够与式(8)一致、如下所示的一个属于“时间域”并且必须定义于“相同”形式量之上的微分方程一起

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mathbf{H} \quad t \in R \quad (14)$$

共同构造一个“合理存在”的波动方程

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \Psi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mathbf{G} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = \varrho \end{cases} \quad (15)$$

其中,第二个泛定方程可以视为一种“附加约束”方程,相应弥补双旋度算子内蕴的“不确定性”特性。也就是说,对于式(13)和式(14)这两个分别属于空间域和时间域中的微分方程,只要属于两个“恰当的——允许相应构造恰当的定解问题”的数学表述,那么,它们相应成为构造波动方程(15)得以存在的“充分性”条件:该波动方程本质上就是两个分别定义于空间域和时间域之中的“恰当”微分方程的耦合。

反过来说,对于式(5)所示的“双旋度 Poisson 波动方程”,即通过“双旋度算子  $\nabla \times \nabla \times$ ”限定待函数  $\Psi$  在空间域行为的形式表述而言,只要存在某种边界条件乃至需要补充约束方程能够构成一个恰当的边值问题,那么,因为式(14)总可以构造一个定义于时间域中的初值问题,所以在对应用于相同边界条件的逻辑前提下,必然逻辑地预示着存在由“双旋度 Poisson 方程”构造的恰当定解

问题。因此，式(5)所定义的波动方程逻辑上自然成为一种“合理”存在。或者说，这个同时对应于空间域和时间域的数学模型，同样能够构造成功满足“可解性”要求的恰当定解问题。

### 5. 双旋度波动方程“完整数学模型”的构造

综上所述，考虑到式(14)所示定义于“时间域”中的微分方程总存在恰当如初值问题，并进而利用本系列论文前一篇论述已经得到的结果，在“空间域”中存在由双旋度 Poisson 算子所构造的恰当数学物理模型

$$? = \Psi(\mathbf{x}) : \begin{cases} \nabla \times \nabla \times \Psi = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \Psi = \mathfrak{G} \\ \mathbf{n} \times \nabla \times \Psi = \mathbf{h} \end{cases} \quad \mathbf{x} \in V \subset R^3 \quad (16)$$

人们立即可以断言：一定相应构造一个允许同时定义于“空间域”和“时间域”之上、并且本质上处于“耦合”之中的恰当数学物理模型

$$? = \Psi(\mathbf{x}, t) : \begin{cases} \nabla \times \nabla \times \Psi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \Psi = \mathfrak{G} \\ \mathbf{n} \times \nabla \times \Psi = \mathbf{h} \\ \Psi|_{t=0} = \Theta, \Psi_t|_{t=0} = \Omega \end{cases} \quad \mathbf{x} \in V \subset R^3, t \in R \quad (17)$$

可以确信，此处的这个数学物理模型，必然满足《McGraw-Hill 物理百科全书》针对“波动方程”所作的定义，可以逻辑地用来描述“一个记为  $\Psi$  的物理量在空间域和时间域进行变化”时一种彼此依存并且具有确定性意义的逻辑关系。

### 参考文献

- [1] 宋文森，张晓娟，徐诚，电磁波基本方程组，科学出版社，北京，2003
- [2] A. . 苏哈鲁柯夫，王珊译，波动理论，复旦大学出版社，1995，上海
- [3] 张恭庆等编译，数学百科全书(1-5卷)，科学出版社，北京，1994 - 2000
- [4] S. P. Parker，物理百科全书，科学出版社，1998
- [5] R. K. Wamgsness, Electromagnetic field, 2-nd edition, John Wiley & sons, 1986
- [6] 杨本洛，经典流体运动分析，科学出版社，北京，1996
- [7] 杨本洛，自然哲学基础分析 —— “相对论”的哲学和数学反思，上海交通大学出版社，上海，2001
- [8] 杨本洛，自然科学体系梳理，上海交通大学出版社，上海，2005
- [9] 杨本洛，量子力学形式逻辑和物质基础探析 —— 现代自然科学基础的哲学和数学反思，上海交通大学出版社，上海，2006

## Proposition of a type of wave equation with independency and the construction of its complete model

— The third part of formal-logic study about rationally rebuilding electromagnetic theory

Yang Benluo



Natural Science Foundation Research Group, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

Email: [blyang@sjtu.edu.cn](mailto:blyang@sjtu.edu.cn)

**Abstract:** By means of revealing the physical connotation and couple formal character implicated in general wave equations, this paper supplies a type of new independent wave equation, constructs a relative mathematical model and discusses its solvability.

**Key words:** wave equation, bispinor operator, existence, solvability