双旋度 Poisson 方程两类定解问题的恰当构造 与 恒稳磁场数学模型的严谨化

—— 理性重构电磁场理论体系形式逻辑分析之二

杨本洛
上海交通大学自然科学基础研究组，上海 200240
Email: blyang@sjtu.edu.cn

摘 要： 无论从基础数学研究还是从物理应用研究考虑，双旋度 Poisson 方程都是一个不可替代的独立方程。但是，不仅一些经典结论中隐含逻辑不相容问题，而且若干重要命题甚至没有考虑。在这篇论文中，除了指出相关经典理论中的一些逻辑不当，还提出两类恰当边值问题，并在此基础上为静磁场理论体系构造了一个恰当的数学模型。
关键词： 双旋度算子，偏微分方程及其边值问题，静磁场

1. 引言

在自然科学研究中，构造一个形式系统的基础只能是相关的经验事实。本质地决定于电荷守恒定律，物理学实验中的电流几乎只可能以“环形电流（ring current）”的方式出现。正因为此，在研究和需要形式地表现电流所激发电磁场的时候，以某种方式蕴含着“环形状”抽象特征的双旋度算子“$\nabla\times\nabla\times$”，同样以一种极其自然的方式出现在相关形式表述之中。进一步说，电磁场理论中双旋度算子的存在，完全独立于不同研究者的不同“主观”意志，被赋予一种“实体论”意义上的“客观性”物质内涵。因此，在研究电流所激发的电磁场时，不能仅仅凭借研究者的“主观”意愿，随意使用另一个无疑简单得多的 Laplace 算子∇^2替代双旋度算子。

事实上，正如人们熟知的那样，对于定义于给定空间域 V 处中的 Laplace 算子，在任意空间点 $\mathbf{x}$ 与包围该空间点的任意边界域∂v 之间，往往构造如下所示的逻辑关联

$$\nabla^2(\mathbf{x}) = \nabla\cdot\nabla \leftrightarrow \mathbf{n}\cdot\nabla: \quad \mathbf{n}\in\partial v, \mathbf{x}\in v\subset V\subset R^3, v\to 0 \tag{1}$$

也就是说，在需要使用 Laplace 算子∇^2 刻画某“物质场”任意空间点 $\mathbf{x}$ 处的行为特征，并且将其与包围该空间点的无穷小体积域 v 相关联时，它相应表现的只能是无穷小体积域边界∂v 上同一物质场在单位法线 $\mathbf{n}$ 上的行为特征。与 Laplace 算子表现的这种特定几何特征几乎完全相反，对于空间域 V 中的另一个物质场，如果需要凭借“双旋度算子$\nabla\times\nabla\times$”描述该物质场的行为特征的时候，那么，后续分析将要指出：一个借助于积分方程加以表述的“等价约束”可以定义在包围给定空间域的封闭边界∂V 之上；或者按照现代微分几何的习惯称谓，这个积分方程只需要定义在一个 2 维的弯曲子空间或 2 维 Riemann 空间 M^2 之上。这样，与 Laplace 算子逻辑地展现给定 3 维空间域 V 边界上的“法线”行为特征相反相成，对于双旋度算子而言，它所描述的本质上恰恰对应于给定空间域边界的“切向”行为特征；并且，由此允许以某种方式限制在一个“低维弯曲子空间”之中，相应构造一种能满足“自封闭”条件的制约关系。[1]

[1] 吻合纯粹的几何直观，单纯的双旋度算子可以构造一个仅仅属于“低维弯曲空间”的等价约束关系。其实，同样可以基于几何的直观分析理性认识到：不允许把 Laplace 算子构造的形式表述压缩到某一个“低维切空间”之中，因为

于是，人们不难推断：在讨论给定空间域 V 中某个待定向量场 $\mathbf{\Psi}$ 时，即使作为某种“特例”允许为该向量场构造“散度满足恒为零”的前提条件，即

$$\nabla\cdot\mathbf{\Psi}(\mathbf{x})\equiv 0,\mathbf{x}\in V\subset R^3 \tag{2}$$

但是，采取经典理论通常使用的方法，根据下述恒等关系式

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}=-\nabla^2\mathbf{\Psi}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Psi})\overset{\nabla\cdot\mathbf{\Psi}=0}{=}-\nabla^2\mathbf{\Psi} \tag{3}$$

将定义于 3 维 Euclid 空间某有限体积域 V 中的双旋度 Poisson 方程

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}(\mathbf{x})=\mathbf{f}\quad \mathbf{x}\in V\subset R^3 \tag{4}$$

变换为通常的向量 Poisson 方程

$$-\nabla^2\mathbf{\Psi}(\mathbf{x})=\mathbf{f}\quad \mathbf{x}\in V\subset R^3 \tag{5}$$

在原则上仍然是不允许的。事实上，以上分析已经指出：在一般情况下，双旋度算子和 Laplace 算子以彼此不同的方式描述了待定函数的不同“空间变化”特征，并且，在给定空间域的边界∂V 上对应于形式上完全不同的定解条件。

总之，式（4）所示的双旋度 Poisson 方程被赋予“独立”的物理实在基础，相应成为具有“独立”意义的偏微分方程。因此，人们不能回避这个特定数学表述形式的“真实”存在，需要认真探讨与双旋度 Poisson 方程相关的一系列基本数学特征。[2]

2. 相关经典理论隐含的一系列逻辑悖论与若干没有解决的问题

按照经典电磁场理论使用符号的习惯，用矢量势 $\mathbf{A}$ 取代式（4）所示双旋度 Poisson 方程中的向量函数 $\mathbf{\Psi}$，则变为静磁场分析中的基本方程

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x})=\mu_0\mathbf{J}\qquad \mathbf{x}\in V\subset R^3 \tag{6}$$

其中，$\mathbf{J}$ 为给定空间域中的电流分布。经典理论在处理这个方程时，往往“无条件”使用如下所示的正则规范

$$\nabla\cdot\mathbf{A}\overset{canonical-gauge}{=}0 \tag{7}$$

但是，经典理论无条件使用正则规范是否真正符合道理？或者更直接地说，针对经典理论对这个习惯使用的变换明显缺乏“数学论证和物理基础”支撑的问题，在一些中国学者书写的著述中早已明确提出了质疑。[1]

值得指出，涉及到如何恰当处理这个特定偏微分方程实际面对的认识困惑或数学疑难，许多西方国家出版的电磁场理论著述，往往以一种‘心照不宣’的方式将它们回避了。例如，在由 J. D. Jackson 撰写、目前在世界上具有相当大影响的《经典电动力学》中，任何一位细心的读者都一定能注意到

该算子描述的正是“切空间”上不同点处“法线方向”的行为。继而，可以得到一个符合逻辑、并且无论对未来纯粹抽象的数学分析还是实际的物理学分析同样具有“启示意义”的重要推论：如果给定 3 维几何空间中仅仅存在一个由双旋度算子构造的微分方程，那么，这个单独的微分方程永远不可能对物质场的行为做出具有“完整”意义的描述。事实上，几乎总可以相信：一个真正合理的科学陈述的形式表述尽管可能十分复杂，但本质上仍然是素朴、自然和可解释的，与被描述的“物理实在”保持抽象一致。当然，在自然科学研究中，如果一个陈述系统必须放弃“可解释性”原则和需要依赖于“直觉顿悟”才可能存在，那么，几乎可以立即断言：这一定是一个“伪科学”的陈述系统。

[2] 定义于空间任何点处的微分方程，表现的仍然函数在整个空间域中需要遵循的“空间变化”特征。因此，在向量场能够满足“散度恒为零”条件的时候，式（3）所示的形式变换仍然适用于整个空间域。但是，问题仍然在于讨论“数学物理模型”曾经指出的：“微分方程”与微分方程构造的“定解问题”属于两个不同的数学命题。单纯的微分方程无法形成一个完整的恰当数学模型。

一种相当奇怪的反常：该书连续列出两章，冠以“静电场边值问题（Boundary-Value Problem in Electrostatics: Ⅰ, Ⅱ）”的标题，以 30 页的篇幅不厌其烦地系统讨论了一个数学上过分简单的“如何求解静电场”问题；但是，在同一著述甚至没有列出“静磁场边值问题”的题目，而代之以“求解静磁场边值问题的方法（Method of Solving Boundary-Value in Magnetostatics）”一个相当微秒的不同提法，在仅仅使用篇幅不到 4 页纸无疑过分简略和粗糙的讨论中，甚至出现讨论边值问题却“完全没有提及边界条件是什么、也无需使用边界条件”这样一种十分滑稽和尴尬的局面。这样，该著述其实是以一种并不“光明磊落”的方式，掩饰经典电磁场理论涉及“静磁场分析”这个最重要命题中实际存在的暂时认识困惑或逻辑悖论。[2]

由于理论体系数学基础的问题没有真正解决，类似的情况必然会同样出现于许许多多的其它电磁场理论著述中。或许可以相信，涉及静磁场理论体系的探讨，J. A. Stratton 在 20 世纪 40 年代撰写的《电磁场理论》，即使经历了半个多世纪并且再版多次，仍可视为反映经典理论实际最高水平的一本优秀著述。但是，因为与双旋度 Poisson 方程相关的一系列基本数学问题并没有真正解决，所以除了积分表述的习惯构造过程存在某些疏忽或逻辑不当以外，人们至今没有意识到“泛定方程齐次形式的解怎样才能满足恒为零条件”的问题与“如何为泛定方程构造恰当边界条件”的问题，尽管彼此关联但并不能真正成为逻辑上的“等价性”命题。其中，特别在讨论前一命题时通常会出现不具“确定性”意义的多个不同答案，如果将其中的某一个答案简单套用至后一命题之中，必然导致逻辑紊乱。正因为此，如何为双旋度 Poisson 方程构造恰当数学模型，这个对于合理构建“静磁场理论”至关重要的数学基础问题至今没有真正得到解决。[3, 4, 7, 9]

当然，由于“静磁场”的相关数学基础尚未“完整、合理和稳定”地建立起来，如何进一步描述“动态电磁场”、建立数学上可以求解的恰当数学模型的一般性问题更不可能得到解决。作为理性重建电磁场体系一个必要的认识基础，此处首先大致罗列经典理论讨论双旋度 Poisson 方程若干主要结果中几乎显然存在的“逻辑不自洽”问题。

2.1 求解双旋度 Poisson 方程习惯使用的“正则规范”隐含“逻辑自悖”的问题

在求解借助于式（4）的一般性表述、关于矢量势函数 $\boldsymbol{\Psi}$ 的双旋度 Poisson 方程时，如果允许首先“不加证明”地承认双旋度 Poisson 方程满足关于该矢量势散度所作的任意假设

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi} \overset{postulate}{=} \vartheta \tag{8}$$

式右为人为设定的标量函数。但是，从“一般常理”或者“素朴逻辑”出发，可以立即推知：即使这个假设充分合理，但是，作为双旋度 Poisson 方程的特定数学属性仍然无法泛化为无需任何“逻辑前提”的“普遍性（Universal）”特征。也就是说，这个合理假设仍然必须逻辑地隶属于双旋度 Poisson 方程，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi} \overset{postulate}{=} \vartheta << \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{f} \tag{9}$$

此处，有意使用符号“<<”特指某种“特性”隶属于某个“客体”的逻辑关联。显然，如果与“集合论”中通常使用形式逻辑符号“∈”表示“某个元素作为某元素集合中的一个”相比，它们在逻辑上表示两个完全不同的概念。

于是，根据形式逻辑，一定根据式（7）所示的正则规范，将双旋度 Poisson 方程转化为一般形式的向量 Poisson 方程

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{f} \overset{Canonical.}{\rightarrow} -\nabla^2\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{f} \tag{10}$$

那么，原来只允许隶属于双旋度 Poisson 方程的正则假设，随着双旋度 Poisson 方程变换为其它形式的方程在逻辑上同样已经不复存在。因此，问题远不仅仅在于像文献[1]特地指出的：需要考虑如何为“仅仅属于双旋度 Poisson 方程”的正则假设补充一个数学上必需的“合理性”证明；其实，一个

更为关键的问题在于：仍然不允许根据正则假设的“合理”存在，就能够将双旋度 Poisson 方程转化为一般形式的向量 Poisson 方程。因为拥有某种形式特征的“逻辑主体”一旦失去，那么，从属于该逻辑主体的“形式特征”必将自然消失。否则，如果还继续沿用那个最初必须“条件存在”的形式特征，相关的形式系统必然陷入悖谬之中。

因此，不难形成一种“准确”的判断：在经典理论中，那种“依赖正则规范将双旋度 Poisson 方程变换为一般 Poisson 方程”的习惯做法，本质地处于严重“逻辑自悖”之中。与此同时，几乎可以立即做出另一个“大致合理”的推测：在经典理论中，不仅对“双旋度 Poisson 方程为什么能满足式（7）所示正则规范的真正原因”缺乏深刻的理解，而且，对于式（8）可能蕴含的“丰富数学内涵和物理基础实在”至今处于完全“懵然无知”的状态。当然，这些自然成为“人们不可能真正揭示 Maxwell 理论体系数学上无法求解”的重要原因。

2.2 双旋度 Poisson 方程两种经典积分表述之间的逻辑不相容问题

从形式逻辑的角度考虑，施加于连续可微函数的“微分运算”以及作为其“逆运算”的重新积分，本质上隶属于“线性运算”范畴。因此，如何为线性微分方程构造逻辑上与其等价的恰当“积分”表述，往往成为揭示微分方程内蕴的基本数学特征、进而考虑如何为微分方程构造恰当“定解问题”时的基本途径和一种最有效的研究方法。事实上，经典理论在讨论双旋度 Poisson 方程，寻找与其保持逻辑相容的边界条件的时候，为该方程构造恰当积分表述的问题同样成为人们习惯使用的基本方法。

在相关经典分析中，通常存在两种不同形式的积分表述。第一种形式的积分表述属于微分方程理论通常所说的 0 阶积分表述，经典理论通常使用的结果是

$$\begin{aligned} w\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) = & \int_V \mathbf{f}E\,dV \\ & - \oint_{\partial V} [\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Psi}\,\nabla E + \mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{\Psi})E + (\mathbf{n}\times\mathbf{\Psi})\times\nabla E]\,dA \end{aligned} \tag{11}$$

式中，E 为 Poisson 方程的基本解；而系数 w 称之为权函数，仅仅决定于与自变量 $\mathbf{x}$ 相对应“几何点”所处的空间位置以及包容该几何点“无穷小定义域”的几何特征。另一种形式的积分表述为 1 阶积分表述，经典理论使用的结果是

$$\begin{aligned} w\nabla\times\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) = & \int_V \mathbf{f}\times\nabla E\,dV \\ & - \oint_{\partial V} [(\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{\Psi})\times\nabla E + \mathbf{n}\cdot\nabla\times\mathbf{\Psi}\nabla E]\,dA \end{aligned} \tag{12}$$

在一些经典著述中，还往往把此处所述的第二种积分表述称之为“广义 Biot-Savart 公式”。

但是，通过直接考察上述积分方程或者只需要进行简单的微分运算，就不难发现以上经典表述实际上隐含一系列逻辑不当乃至逻辑悖论的问题。

首先，如果对式（11）所示的势函数 $\mathbf{\Psi}$ 作旋度运算，其结果与式（12）直接给出的矢量势旋度 $\nabla\times\mathbf{\Psi}$ 并不相等，即

$$\nabla\times[w\mathbf{\Psi}(\mathbf{x})]_{equ.(11)} \neq w\nabla\times\mathbf{\Psi}(\mathbf{x})_{equ.(12)} \tag{13}$$

从形式逻辑考虑，这通常意味着其中最少有一个积分表述并不恰当。

此外，经典理论在推导 0 阶积分表述的过程中，使用了“矢量势散度 $\nabla\cdot\mathbf{\Psi}$ 等于零”的人为假设。但是，如果像经典电磁场理论所述，有时候还需要使用诸如 Lorentz 规范那样的人为假设，令矢量势的散度 $\nabla\cdot\mathbf{\Psi}$ 等于一个不为零的给定量，那么，在这种情况下此处的积分表述还适用吗？如果不再适用，合适的替代方程是应该什么呢？

再其次，如果考察式（11）所示的 0 阶积分表述，人们发现并不能对边界条件允许的恰当形式

做出具有决定意义的推断。事实上，构造相关积分表述时一旦使用或默认类似于式（8）这样的正则假设，那么，直接以矢量势 $\mathbf{\Psi}$ 或它的分量作为定解条件往往都是不恰当的，即

$$Irrational:\begin{cases}\mathbf{n}\cdot\Psi(\mathbf{x}) \\ \mathbf{n}\times\Psi(\mathbf{x})\end{cases}\quad \mathbf{x}\in\partial V \tag{14}$$

或者说，对边界上的矢量势做出的任何限制都可能与正则假设形成矛盾。同样由于这个问题缺乏较为深入的分析，经典理论在论述静磁场定解问题恰当边界条件时往往隐含某种认识紊乱。其实，因为无需也不能直接表述静磁场的矢量势 $\mathbf{A}$，所以才可能满足通常使用正则规范必需的前提条件；那么，作为一个自然的逻辑推论：无需也不能直接将矢量势 $\mathbf{A}$ 或它的任何分量用作边界条件。[3]

与经典理论积分表述逻辑不当相关的最后一个问题，则完全出现于第二类积分表述之上。人们不难发现：这个积分表述的封闭边界积分仅仅有 3 个“独立”的标量分量，不允许再“自由”地设置任何形式的量作为边界条件，否则，构成矛盾方程。也就是说，经典理论中的第二类积分表述本质上已经蜕化为一个附加的“约束”方程，因此，人们无法根据这个积分表述考虑如何构造恰当边界条件问题。

毫无疑问，由于属于数学自身的一系列纯粹形式逻辑问题没有得到解决，如何给双旋度 Poisson 方程的恰当边界条件赋予确定的物质内涵，从而使整个数学表述相应成为具有实际意义的物理学陈述，这样一个对于自然科学研究无疑更为重要的问题同样无从谈起。

3. 双旋度 Poisson 方程积分方程的重新构造和矢量势任意散度假设的“自适定性”证明

始终可以相信：只要相关数学推导的每一步能够真正符合逻辑，或者说，在逻辑推理过程中的每一步，都能够切实关注和严格遵守必须满足的前提条件，那么，消除经典理论体系中的那些认识困惑以及逻辑悖论没有任何本质意义的困难。当然，这个对整个自然科学体系具有普遍意义的“一般性”论断，同样适用于此处需要解决的问题。据此，对于式（4）所示的一般性双旋度 Poisson 方程，不难求得与其保持严格逻辑相容的两类积分表述，即

$$\begin{aligned} w\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) = &\int_V (\mathbf{f}E + \vartheta\nabla E)\,dV \\ &-\oint_{\partial V}[\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Psi}\,\nabla E + \mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{\Psi})E + (\mathbf{n}\times\mathbf{\Psi})\times\nabla E]\,dA \end{aligned} \tag{15}$$

为重新构造的第一类积分表述，其中 ϑ 定义为一个任意给定的标量函数；而

$$\begin{aligned} w\nabla\times\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) = &\int_V \mathbf{f}\times\nabla E\,dV \\ &-\oint_{\partial V}[(\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{\Psi})\times\nabla E + (\mathbf{n}\times\mathbf{\Psi})\cdot\nabla\nabla E]\,dA \end{aligned} \tag{16}$$

则是重新构造的第二类积分表述。

首先，可以直接验证：如果对第一类积分表述施加旋度运算，其结果恰恰等于第二类积分表述。于是，两类积分表述能够在严格意义上保持逻辑相容。

其次，对第一类积分表述作散度运算，可以得到

$$\nabla\cdot\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) \equiv \vartheta,\quad \mathbf{x}\in V \tag{17}$$

显然，从形式逻辑考虑，这是一个重要的关系式。因为积分表述（15）已经对标量函数 ϑ 事先做出满足“任意性”要求约定，所以对于“单个（Singular）”双旋度 Poisson 方程所制约的矢量势 $\mathbf{\Psi}$ 而言，自然能够满足“任意给定散度假设”的“自适定性”要求。或者说，对于文献[1]针对式（8）所示的正则规范是否合理的质疑，这个关系式相应提供了一个必要的补充证明。

继而，考虑到场分析中的 Gauss 公式

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{\Psi}dV=\oint_{\partial V}\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Psi}dA \tag{18}$$

人们可以立即逻辑地推知：无论任意给定的标量函数 ϑ 等于什么，恒等于零还是对应于任何其它形式的分布，但是，边界上矢量势的法向分量 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{\Psi}$ 只允许被纳入“待定量（即从属量）”的范畴，而绝对不能将其用作边界条件，否则与式（17）所构造的“自适定性”方程矛盾。

最后，如果直接考察第二类积分表述，人们还可以发现隶属于双旋度 Poisson 方程一种特别的‘几何”属性：除了决定于源项 $\mathbf{f}$ 的体积分允许被视为某种“固定不变”的存在以外，边界积分中的矢量势或矢量势的旋度仅仅出现“切向”分量，因此，如果允许使用现代微分几何的语言，该积分表述被定义于有限大几何域 V 边界的“切空间”之内。也就是说，双旋度 Poisson 方程以及与其严格逻辑相容的积分表述，本质上只是构造了一个属于“2 维 Riemann 空间”的约束方程。

4. 双旋度 Poisson 方程内蕴的“欠定性”特征

在进一步考虑怎样才能为双旋度 Poisson 方程构造恰当“定解问题”以前，针对式（17）所显示的“自适定性”特征，以及这个“特殊属性”可能隐含怎样的抽象数学内涵问题，值得人们给予特别的关注。根据显而易见的逻辑关系，在人们仅仅把双旋度 Poisson 方程定义为某一个恰当“定解问题”中“唯一”一个泛定方程的时候，因为矢量势的散度$\nabla\cdot\mathbf{\Psi}$ 不具“确定性”意义，所以作为该泛定方程中因变量的矢量势 $\mathbf{\Psi}$ 本身同样不可能具有“确定性”意义。

事实上，如果注意到在式（16）所示的第二类积分表述中，甚至没有出现矢量势的散度$\nabla\cdot\mathbf{\Psi}$，那么，可以断言：即使已经确定相关数学模型中的恰当边界条件，但是如果只允许使用“单个”双旋度 Poisson 方程作为这个“数学模型”中的泛定方程，那么，能满足“唯一性”条件的待定变量只可能是矢量势的旋度，即

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}=\mathbf{f}\quad\xrightarrow{\textit{Proper B.C.}}\quad\nabla\times\mathbf{\Psi} \tag{19}$$

等价地说，无论人们补充怎样的边界条件，对于由“单个”双旋度 Poisson 方程所构造的“定解问题”而言，泛定方程中“显式”出现的矢量势 $\mathbf{\Psi}$ 始终是一个“不确定”的函数。这就是此处所说双旋度 Poisson 方程本质蕴含的“欠定性”特征。

值得指出，对于双旋度 Poisson 方程对矢量势 $\mathbf{\Psi}$ 固有的“欠定性”特征必须形成一种稳定的理性判断。在未来需要探讨“如何恰当构造动态电磁场基本方程”这个基本命题的时候，此处的理性判断具有重要的启示意义。众所周知，经典电磁场理论体系在讨论如何为“动态电磁场”构造恰当数学模型的时候，曾经出现如下形式的方程

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\mathbf{f} \tag{20}$$

式中，$\mathbf{A}$ 为矢量势，至于向量分布 $\mathbf{f}$ 可以暂时视为某一个“有待确定”的源项。显然，在这个形式表述中，时间导数项$\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2$ 不允许仅仅定义在矢量势的旋度$\nabla\times\mathbf{A}$ 之上，必须直接定义于矢量势 $\mathbf{A}$ 自身。因此，对照此处所说“单纯双旋度 Poisson 方程”对矢量势固有的“欠定性”特征，人们可以立即推知：如果只允许从式（20）所示的微分方程出发，以其作为进一步构造“动态电磁场基本方程”或“电磁波基本方程”的唯一基础，那么，无论后续的推导是否恰当，在逻辑上已经前提性地陷入认识悖谬之中。

5. 与双旋度算子相关的第一种“数学物理模型”的恰当构造

众所周知，诸如“静磁场”理论这样的物理学研究，在需要使用双旋度 Poisson 方程刻画“物质场”行为的许多场合，的确无需（其实并非无力）确定矢量势 $\mathbf{\Psi}$ 本身，而仅仅需要对矢量势的旋度 $\nabla\times\mathbf{\Psi}$ 做出必须满足“唯一性”要求的有意义描述。于是，在这种特定情况下，根据式（16）所示的

第二类积分表述可以直接推知，一个与双旋度 Poisson 方程相关的“数学物理模型”或“边值问题”的恰当提法只能是

$$? = \nabla\times\boldsymbol{\Psi}:\begin{cases}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{f} & \\ \mathbf{n}\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{h} & \mathbf{x}\in\partial V\end{cases} \tag{21}$$

在这个特定的数学物理模型中，有意识地明确指出：此时需要和可能求解的仅仅是矢量势的旋度$\nabla\times\boldsymbol{\Psi}$，至于矢量势 $\boldsymbol{\Psi}$ 本身则不能成为满足“唯一性”要求的解，相应不具特定的物理意义或物理内涵。当然，也仅仅因为此，即使从纯粹形式逻辑的角度考虑，也不允许使用类似于 $\mathbf{n}\times\boldsymbol{\Psi}$ 这样一些自身不具确定意义的形式量用作边界条件。

具体求解这个特定数学物理模型时，如果需要使用式（15）所示的第一类积分表述，那么，还可以将上述模型改写为一种等价形式

$$? = \nabla\times\boldsymbol{\Psi}:\begin{cases}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{f} & \\ (\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}=\vartheta) & \\ \mathbf{n}\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{h} & \mathbf{x}\in\partial V\end{cases} \tag{22}$$

其中，ϑ 为人为任意给定的标量函数。显然，在这个等价表述中，矢量势 $\boldsymbol{\Psi}$ 只不过是相关计算过程中需要出现的一个中间变量，自身没有特定的物理内涵。或者说，这个数学物理模型需要求解和能够求解的仍然只是矢量势的旋度$\nabla\times\boldsymbol{\Psi}$，而不是矢量势 $\boldsymbol{\Psi}$ 本身。

值得再次指出，之所以在式（22）所示的边值问题中，容许对矢量势散度$\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}$ 提出任意的人为设定，逻辑地依赖于式（17）所示的“自适定性”特性，当然，这个特定的数学性质同样只能逻辑地隶属于双旋度 Poisson 方程。如果人为改变泛定方程的数学表述形式，那么，这个仅仅隶属于双旋度 Poisson 方程的特定数学特征也不复存在。因此，绝对不允许像经典理论通常所做的那样，将双旋度 Poisson 方程构造的定解问题变换为一般 Poisson 方程构造的定解问题。事实上，与一般矢量 Poisson 方程相关的恰当定解问题只能是

$$\begin{cases}-\nabla^2\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{f} & \\ \boldsymbol{\Psi}=\mathbf{a} & \mathbf{x}\in\partial V_1\\ \mathbf{n}\cdot\nabla\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{b} & \mathbf{x}\in\partial V_2\end{cases} \tag{23}$$

显然，这个数学模型直接定义于矢量函数 $\boldsymbol{\Psi}$ 之上。而且，由于边界条件的形式完全不同，与前面所述由双旋度 Poisson 方程构造的数学物理模型相比，两种数学模型之间甚至不具可比性。“皮之不存、毛将焉附”。随着双旋度 Poisson 方程不再存在，那么，原来属于这个特定数学表述形式的所有特定数学特征也必然逻辑地不再存在。当然，绝不允许根据双旋度 Poisson 方程关于矢量势任意散度假设的自适定性，而否定拥有这种“特定”属性的“特定”形式表述。

6. 与双旋度算子相关的第二种“数学物理模型”的恰当构造

毋庸置疑，作为上述分析一个十分自然的推论，必然存在另一个具有独立形式意义以及相应被赋予独立物理内涵的数学物理模型

$$? = \boldsymbol{\Psi}:\begin{cases}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{f} & \\ \nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}=\vartheta & \\ \mathbf{n}\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{h} & \mathbf{x}\in\partial V\end{cases} \tag{24}$$

此时，矢量势的散度$\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi}$ 不能继续作为任意的“人为假设”而存在。或者说，随着矢量势的散度被赋予确定的物理内涵，矢量势 $\boldsymbol{\Psi}$ 自身也相应被赋予确定的物理内涵。因此，与是（22）所示的数学物理模型完全不同，这个恰当的定解问题需要和能够“唯一”确定的已经不再仅仅是矢量势的旋度

$\nabla\times\mathbf{\Psi}$，而重新恢复为矢量势 $\mathbf{\Psi}$ 自身

特别需要注意，在这个重新构造的数学物理模型中，泛定方程已经不仅仅是式（4）所示的“单个”双旋度 Poisson 方程，变化为同时定义于整个空间域 V 中“两个”需要被赋予“实在意义（物理内涵）”的泛定方程组合，即

$$\begin{cases}\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}=\mathbf{f}\\ \nabla\cdot\mathbf{\Psi}=\vartheta\end{cases}\quad\in V\subset R^3 \tag{25}$$

正因为此，隶属于“单个”双旋度 Poisson 方程的“矢量势欠定性特征”也逻辑地随之消失。[3]

如果根据此处获得的一系列结果，重新考察式（20）所示经典电磁场理论体系通常使用的波动方程，那么，不难做出符合逻辑的合理推测：在需要描述“动态电磁场”或“电磁波”现象时，与空间域 V 中这个由“双旋度算子”所构造的泛定方程相伴，必然还存在另一个与“矢量势散度”相关并且必然蕴含某种特定“物质内涵”或者必须被赋予“实体论”基础、然而至今人们尚未觉察到的泛定方程。否则，无论补充怎样的边界条件，与“电磁波”相关的数学模型始终是“欠定”的。

7. 恒稳磁场数学模型的严谨化思考

本质上由于涉及双旋度 Poisson 方程的一系列数学基础问题没有得到解决，正如前面讨论已经提到的那样，在如何为静磁场理论体系构造恰当数学物理模型方面，实际上存在许多需要进一步“严谨化”的问题。

7.1 静磁场恰当边值问题的建立

人们熟知，在构建经典电磁场理论体系的历史进程中，作为“静磁场”分析的基本方程，并非如下所示直接建立在磁场 $\mathbf{B}$ 之上的 Ampere 定律

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J} \tag{26}$$

构建静磁场理论体系的全部基础，是下述 Biot-Savart 公式所表示的经验事实

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})\times\mathbf{r}}{r^3}dV \tag{27}$$

式中，r 为场点 $\mathbf{x}$ 与源点 $\mathbf{x}'$ 间的距离。并且，由此可以形式地引入一个相关的等价性表述

$$\mathbf{B}(\mathbf{x})=\nabla\times\mathbf{A}:\mathbf{A}(\mathbf{x})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\mathbf{J}\frac{1}{r}dV \tag{28}$$

式中 $\mathbf{A}$ 为静磁场的矢量势。

在研究任何形式“物质场”的时候，为了表现物质场在其所处空间域中任意一点处具有的“共性”特征，需要首先构造恰当定解问题中一个“泛定”的微分方程。用以描述“静磁场”的泛定方程，必须将矢量势 A 直接定义为因变量

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{J} \tag{29}$$

由于在静磁场理论中通常只关注或仅仅需要求解磁场 $\mathbf{B}$，对照式（21）所示的恰当数学模型可知，一个本质上用以求解静磁场矢量势旋度$\nabla\times\mathbf{A}$ 的相关定解问题为

[3] 有关双旋度 Poisson 方程最初的若干具体分析请参见文献[5]。附带指出：除了个别结论需要进一步完善，一系列彼此关联的主要研究结果已经由笔者的工作助手完成了数值计算验证，与数值计算相关的论文已于前些年公开发表。

$$? = \nabla\times\mathbf{A}:\begin{cases}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{J}\\ \mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{j}\end{cases} \tag{30}$$

并且，此处给出的恰当边界条件明确地告诉人们：该数学物理模型所描述的静磁场 **B**，不仅仅属于空间域给定的电流分布 **J**，它还逻辑地包含了边界电流分布 **j** 相应做出的贡献。

7.2 若干需要注意的问题

仍然归咎于与双旋度 Poisson 方程相关的一系列数学基础问题没有真正得到解决，若干与静磁场数学模型相关的问题需要作进一步的澄清。

（1）定解问题的恰当形式问题

首先，在诸如[2]这样一些有影响的经典电磁场理论著述中，往往根据“双旋度 Poisson 方程齐次形式解的恒为零条件”的分析，还同时给出另一种形式的边值问题

$$? = \nabla\times\mathbf{A}:\begin{cases}\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{J}\\ \mathbf{n}\times\mathbf{A}=\mathbf{b}\end{cases} \tag{31}$$

但是，这个数学模型本质上是无意义的。从形式逻辑考虑，边界条件与该数学模型无需也无力确定矢量势之间隐含逻辑悖论；从物理理念考虑，无法为矢量势在边界上的切向分量 $\mathbf{n}\times\mathbf{A}$ 直接提供确定的物质内涵。[4]

（2）另一个独立数学物理模型的提出

事实上，尽管静磁场只需要关注矢量势的旋度$\nabla\times\mathbf{A}$ 或磁场 **B**，但是与电磁场相关的许多现代研究都表明，矢量势 **A** 本身往往包容更多有用的信息，相应成为比磁场 **B** 更为基本的物理量。因此，理论上值得进一步探讨：静磁场中的矢量势 **A** 逻辑上是否隐含某种“确定性”的意义，或者说，静磁场的矢量势在物理上能否与某种特定的“物质内涵”构成确定逻辑关联？

对于此处所提的质疑，答案是肯定的。事实上，对于任何一个使用严格的数学语言，亲身经历从式（27）所示 Biot-Savart 公式到式（26）所示 Ampere 定律整个推导过程的研究者都知道，一个与矢量势散度相关中的中间表述是

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V[\nabla'\cdot(\mathbf{J}\frac{1}{r})-\frac{1}{r}\nabla'\cdot\mathbf{J}]dV'\\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}[\oint_{\partial V}\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}\frac{1}{r}dA-\int_V\frac{1}{r}\nabla'\cdot\mathbf{J}dV']\end{aligned} \tag{32}$$

其中，第一项封闭边界积分恒为零，与边界上不允许存在法向电流分量一个“合理和自然”的要求相对应；式中的第二项体积分同样等于零，决定于恒稳电流的电荷守恒定律。这样，在静磁场的经典分析中，被人们习惯称作的正则假设

$$\nabla\cdot\mathbf{A}\overset{postulate}{=}0 \tag{33}$$

原则上已经不允许继续被视为某种人为假设，静磁场矢量势散度等于零实际上是一个确定的物理学陈述，被赋予实实在在的物质意义或物理内涵。因此，对照式（24）所示的恰当边值问题可知，在描述静磁场的时候，相应存在一个直接定义在静磁场矢量势 **A** 之上如下所示的数学模型

[4] 注意，并不能由此作“一般性”断言：矢量势 **A** 本身没有确定的“物质内涵”或缺乏“实体论”的支撑。不仅现代量子力学已经指出，在许多相关的物理现象中都需要把矢量势 **A** 视为一个基本物理量，而且，在需要形式地表现电磁波时，矢量势 **A** 同样被赋予确定的物理内涵。当然，与科学陈述必需的逻辑相容性一致，出现于静磁场中的矢量势 **A** 其实同样隐含属于相关物理现象自身的某种确定物理内涵。

$$? = \mathbf{A}: \begin{cases} \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} \\ \nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} \end{cases} \tag{34}$$

显然，该数学模型仍然与式（30）构造的定解问题保持严格逻辑相容。而且，人们还可以推测：这个与实际物理内涵更为一致的数学模型，一定相应隐含格外丰富的有用信息。

（3）一个“自然”的后续质疑：静磁场模型能否进一步延拓至“动态磁场”分析？

此处重新假设：如果给定的电流分布 $\mathbf{J}$ 处于“非恒稳”状态，式（32）中的体积分项不再恒等于零。于是，不妨引入一个符号，形式地表示这个由于电流“动态变化”而出现的附加项

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{J}dV = \vartheta(\mathbf{x},t) \tag{35}$$

那么，人们几乎会十分自然提出：在这种情况下，能否继续沿用前面讨论的恰当边值问题，相应构造如下所示的数学物理模型

$$? = \mathbf{A}: \begin{cases} \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} \\ \nabla\cdot\mathbf{A} = \vartheta \\ \mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} \end{cases} \tag{36}$$

进一步用于描述“动态电流”激发的“动态磁场”呢？

对于这个看似自然的质疑，答案是否定的；而这样的否定才是真正自然的。需要注意：式（24）所示的边值问题定义于纯粹空间域之中，只允许描述时间域中处于不变状况的物质场状况。人们必须始终牢牢记住：在自然科学研究的逻辑推理过程中，逻辑推论永远不可能超越逻辑前提；超越逻辑前提和不讲条件的“无穷演绎”已经谈不上逻辑，只可能引起认识的紊乱。

8. 合理形式表述“整体观”和“局限性”的辩证统一

以上的所有分析属于纯粹形式逻辑的范畴。事实上，人们不难发现：自然科学陈述对于“理性”的全部诉求，正本质地蕴含于对“逻辑 —— 无矛盾”的诉求之中。因此，仍然值得从纯粹逻辑思考的角度，探询自然科学中任何一个合理形式表述系统几乎必然存在的“整体性”要求与“局部性”限制，以及两种特征之间辩证统一的问题。也只是因为此，自然科学中的某些陈述系统尽管逻辑上并不完备，却仍然具有实际应用价值。

面对无尽大自然，人们永远无法穷尽物质世界的真实。另一方面，为了对某个物理现象能够做出人们期待中具有“确定意义”的描述，一个由微分方程构造的完整数学物理模型几乎必然建立在一个“有限论域”之中。反过来，当人们期望使用这样的形式表述系统，描述特定“体积域”中发生的物理现象时，定义于该体积域之中的泛定微分方程与仅仅定义在该体积域边界上的边界条件必须逻辑相容，以保证它们同属于一个相同的物理现象。事实上，完全依赖于同一个函数在体积域及其边界分布之间必须的逻辑联系，才可能建立的如式（15、16）等积分表述以及与其保持逻辑相容的如式（21、24）构造的恰当定解问题，相应刻画同一个函数不同分布之间的某种“整体性”关联以及确定论域给予的“有限性”限制，并且处于相互支撑的辩证统一之中。同样因为此，才可能如人们熟知的那样，在许多数学物理方程著述中，微分方程得到“恰当定解问题”往往又被赋予“完整数学模型（complete mathematical model）”这样一个完全等价的称呼。

基于完全同样的道理，类似于式（10）所示的“正则变换”只可能在“局部”意义上，即体积域“内部”满足逻辑推理必需的“无矛盾性”条件，却破坏了边界上同样必须满足的“一致性”要求。当然，这种“部分逻辑相容”的形式变换在逻辑上是不允许的，造成数学模型的“整体”无法求解的结果。但是，如果将相关讨论严格限制在无需考虑“边界”行为的“无穷大域”之中，或仅

仅讨论“一维表述”的特殊场合，那么，那个隐含“局部真理性”的模型又能相应揭示某些“局部意义”存在的物理实在。这样，对于文献[1]所揭示，电磁场经典理论一方面数学上不具可解性，另一方面仍然允许使用一般 Laplace 方程描述某些局部性的物理真实，才可能为这种看似矛盾的真实情况提供符合逻辑的合理依据。

9．关于双旋度 Poisson 方程研究现状的一个附带的“历史性”反思

虽然不应对“理论物理”和纯粹的“数学研究”作绝然区分，但是，仍然值得提醒人们注意这样一个事实：有关双旋度 Poisson 方程的讨论大都出现在理论物理的相关著述中，似乎很少有职业数学家愿意对这个被明显赋予“实体论”基础的重要数学命题进行严肃和深入的探讨。事实上，对 20 世纪的数学乃至整个现代自然科学研究持续发挥某种“导向性”影响的 D. Hilbert，在其参与著名、但由 R. Courant 主编的《Methods of Mathematical Physics》鸿篇巨制中，甚至完全没有提及“双旋度算子与该算子所构造不同微分方程”的命题。

众所周知，除了称谓不同，Hilbert 的“公理化体系”与“约定论”没有丝毫差别。然而，在自然科学研究或者逻辑推理过程之中，一旦允许随意引入纯粹“人为主观”的约定，已经逻辑地意味着“逻辑不复存在”的必然。其实，对于 19 世纪中叶的科学工作者实际上需要面对那个时代的数学根本不可能处理、甚至无法在形式上予以恰当表述的“双旋度算子”，以及由双旋度算子所构造微分方程的时候，经典理论中的“正则假设”，正由于像文献[1]所指出的那样，由于“缺乏严格数学证明和物理实在支撑”本质上仍然只是人们无奈做出的人为约定。任何形式的“人为约定”无疑可能暂时掩饰矛盾，但是，主观臆测终究不可能真正改变矛盾存在的客观事实。事实上，自然科学研究总会不断遇到矛盾，但是，人们始终可以理性地相信：对于任何形式“约定论”的纵容无异于纯粹的自欺。在这个意义上，Brouwer 的“直觉主义”看似公开否定逻辑，却由于诚实地指出和承认“矛盾存在”的客观事实反而更接近真理。

事实上，在 M. Kline 所著《数学：确定性的丧失》一书中，如果说著者诚实地向人们告诫“整个数学大厦真实地面对由于容忍矛盾而必将坍塌”的危险；同时向人们描述关于“现代数学”这样一幅的图景：一方面《数学评论（美国）》每年至少发表 12,000 以上条“重大”数学创造，另一方面这些做出重大贡献的职业数学家完全不在乎这些创造“是对还是错”的问题，那么，造成这种荒唐局面的逻辑根源只在于对“约定论”的放纵。事实上，人们不能不询问：许许多多职业数学家们为什么无力拒绝形形色色“约定论”一种过分廉价的诱惑，沉迷于“过分虚幻”和根本无需“逻辑支撑”的思维“冲动和自由”之中，进行公然无视逻辑严谨性的“随意”创造？当然，反过来又为什么不能以一种主动、认真和严肃的态度，探讨如何克服数学自身的矛盾以及现代自然科学中许多与数学相关但至今并没有得到解决的实实在在命题呢？[5]

在 20 世纪末，发生了一场所谓的“科学大战”，相应对整个西方知识社会产生广泛和深刻的影响。人们指出，发起这场“科学保卫战”的目的在于：“保卫科学真理的客观性和符合逻辑的科学方法”。事实上，对于每一个诚实和严肃的科学工作者，已经无法回避自然科学需要重新面对“是否需要‘实体论’基础以及是否必须服从以‘逻辑相容性’为全部本质内涵的‘理性’原则”问题。当然，当“科学大战”的双方谁也说服不了谁，同样十分无奈地陷入发动“科学大战”的“科学卫士”曾经竭力反对的所谓“人文主义相互攻奸”的时候，其实，对于这些“内心渴望捍卫逻辑”的科学卫士，他们同样需要首先努力学会使用无歧义的“形式逻辑”语言以及严密的“演绎逻辑”武器，对他们无条件认同和捍卫的现代自然科学体系进行深刻反省。[6]

参考文献

[1] 宋文淼，并矢格林函数和电磁场的算子理论，中国科技大学出版社，合肥，1993
[2] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley, New York, 1997

[3] J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1941
[4] Tung Tsang (Howard University, Washington *USA*), Classical Electrodynamics, World Scientific, 1997
[5] M· 克莱因著，李宏魁译，数学：确定性的丧失，湖南科学技术出版社，长沙，2004
[6] 索卡尔等原著，蔡仲、邢冬梅译，“索卡尔事件”与科学大战，南京大学出版社，南京，2002
[7] 杨本洛，经典流体运动分析，科学出版社，北京，1996
[8] 杨本洛，自然科学体系梳理，上海交通大学出版社，上海，2005
[9] 杨本洛，量子力学形式逻辑和物质基础探析 —— 现代自然科学基础的哲学和数学反思，上海交通大学出版社，上海，2006

Construction of two tapes of proper boundary value problem based on bispinor Poisson's equation and an exact model for magnetostatic field

— The second part of formal-logic study about rationally rebuilding electromagnetic theory

Yang Benluo

Natural Science Foundation Research Group, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China
Email: blyang@sjtu.edu.cn

Abstract: Poisson's equation using with bispinor operator is of indispensable significance for both the basic mathematic and physic application researches. But, some inconsistencies are implicated in the conventional conclusion and a lot of important propositions have not been conscious. In this paper, besides a series of improprieties of the classical theory will be pointed out, two tapes of properly posed boundary value problems will be supposed and, based upon which, an exact mathematical model for electromagnetic field will be presented.

Key words: bispinor operator, partial differential equation and its boundary value problem, electromagnetic field