现代计算电磁学数学基础的若干初步思考 [1]

—— 理性重构电磁场理论体系形式逻辑分析之九

杨本洛
上海交通大学自然科学基础研究组，上海 200240
Email: blyang@sjtu.edu.cn

摘　要：求解由变化电流激发的时变电磁场属于现代计算电磁学的核心部分。但是，和计算偏微分方程所描述物质场的其它问题不同，目前的电磁场计算并没有直接使用“计算数学”为偏微分方程定解问题所提供“抽象和形式化”的一般性计算方法，而往往需要依据电磁场经典理论提供的特定物理内涵重新构造不同形式的模型再进行计算。虽然这样的处理能够在一定程度上解决一系列特定的电磁学命题，但是在处理较复杂的一般性时变电磁场命题时，目前实际使用的不同模型实际上隐含逻辑上并不严格乃至物理失真的问题。究其原因在于：时变电磁场缺乏一个形式上统一、而逻辑上能够保证泛定方程与定解条件严格相容的数学物理模型。反过来，一旦属于时变电磁场的恰当数学物理模型得以真正建立，不仅可以有效使用计算数学所提供不同计算模式，并且相应能够提供更为丰富和准确的电磁场信息。
关键词：逻辑，时变电磁场，恰当定解问题，数值计算

0．引言

宋文淼先生在《电磁波基本方程组（2003 年、科学出版社）》一书的前言，曾经明确提出这样一个属于著者自己的判断

> Maxwell 在 19 世纪 70 年代提出了关于存在电磁波以及光就是电磁波这样一个科学史上最大胆的预言。但是，Maxwell 所提出关于电磁场的统一方程组实际上无法求解的。

可以相信这个判断不仅仅一定具有某种重大的理论价值，而且从纯粹电磁场计算的角度考虑仍然极具启示意义的话。事实上，针对目前计算电磁学的现状考虑则需要解决以下主要问题：能否以及如何构造数学上可以求解的“一般性”方程；如何选择恰当的形式变量，减少形式系统的变量数和计算量；如何保证“计算模型”的精确化或与物理背景的逻辑相容。随着这些问题的逐步解决，在描述较复杂电磁场或电磁波现象时，可望获得更为真实的数值解。[2]

毋庸置疑，电磁场的计算已经获得丰硕的成果，在相当程度上描述了电磁场的物理真实，成为支撑现代通讯技术的重要基础。从纯粹计算数学的角度考虑，Maxwell 方程形式上只是最简单的线性方程组，根据经典理论中习惯使用的方法所构造的波动方程同样不复杂，但是，电磁场的数值计算却为什么显得如此复杂，并且，实际上只能针对不同特定情况构造不同特定的求解模式，而无法按照求解偏微分方程定解问题的通常方式计算电磁场呢？当然，面对“Maxwell 所提出关于电磁场的统一方程组实际上无法求解”的实际困惑，根本不可能进一步考虑在某一个“非均匀化”电磁场的背景中，电磁波呈现“弯曲迹线”这样一些平凡、真实然而重要的物理实在。

---

[1] 中国科学院于 2007 年 2 月 5 日于在网络信息中心召开《中国科学院范围内高性能电磁计算软件和应用学术研讨会》，笔者应邀参加此次会议。本文为参加此次会议临时而作，会后对原文稍作补充和整理。

[2] 需要顺便指出，对于由偏微分方程定解问题所构造的数学物理模型，必须并仅仅需要泛定方程和边界条件是真正协调的，那么，该数学物理模型就一定是可解或者是可计算的。但是，偏微分方程的可解性绝不意味着相应存在“解析解”的推论。因此，数学物理模型的“不可解”问题与不存在“解析解”属于两个完全不同的概念，切不可将它们混为一谈。

因此，当人们几乎完全致力于“ 计算方法 ”的改进，而忽视数学模型乃至物理模型本身是否存在问题时，重新从数学物理模型的整个基础开始，考虑 Maxwell 方程组及其构造的波动方程是否真的逻辑自洽这样一个更为根本的问题一定能够获得事半功倍的效果。更为直观乃至容忍采取“ 实用主义 ”的观点加以反思，一方面至今为止以 Maxwell 方程组为基础的电磁计算的确描述了许许多多的电磁现象，所以这个形式表述形式的确在相当程度上真实刻画了电磁场需要满足的变化关系，另一方面一个恰当数学物理模型必须遵循的特定逻辑关联并没有得到满足，否则电磁场的数值计算不可能变得如此复杂和零乱。这样，不仅仅需要从“ 方法论 ”的角度考虑如何计算电磁场的不同具体问题，更需要重新探讨这个形式系统的整体在逻辑上是否真正自洽，一个往往为专业的电磁学研究者容易忽视的基础性命题，从而解决如何为电磁计算构造“ 一般性模式 ”的基础，将计算数学所提供求解偏微分方程定解问题的“ 一般性 ” 计算方法灵活应用于不同特定场合，相应提供更为丰富和准确的信息。

1．计算电磁学目前隐含的若干逻辑不自洽问题

电磁场理论体系属于一个大的形式系统，电磁场数值计算需要面对的同样是形形色色的电磁现象。但是，目前计算电磁学的核心在于如何计算“ 时变电磁场 ”的问题，本文主要针对此处所述“ 时变电磁场 ”的特定命题进行讨论。

1.1 Maxwell 方程组形式不完整问题

经典表述的 Maxwell 方程组为

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho \\ \nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \\ \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \\ c^2\nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{J}/\varepsilon_0 + \partial\mathbf{E}/\partial t \end{cases} \tag{1.1}$$

对于描述物质场的任何恰当数学物理模型，必须由泛定方程与与其保持逻辑相容的边界条件两部分组成。此处的形式表述系统由一阶线性偏微分方程组所构造，并是用于描述物质场‘ 内部行为 ”的控制方程。显然，如果“ 泛定方程 ”只是一阶微分方程形式，那么它永远不可能与边界条件构成一个“ 恰当、完整 ”的数学模型。

进一步说，由于只是“ 一阶方程 ”的组合，在逻辑上甚至无法与任何形式的边界条件匹配。因此，与经典电磁场理论体系的构造源于“ 类比 ”的历史真实保持一致，这个数学表述原则上只能大致表现 Maxwell 关于动态电磁场特征曾经做出一种“ 直观意义 ”的猜测，虽然这种猜测在许多情况下能够与经验事实保持一致。（从物理概念考虑，则无法回避如何赋予“ 位移电流 ”以真实物理内涵的问题。）[3]

1.2 经典表述中自变量和因变量之间的逻辑不相容问题和因变量的重新恰当认定

无论从形式逻辑还是从物理实在的角度考虑，作为激发电磁场的两个源项，即电荷分布 ρ 与电流分布 $\mathbf{J}$ 是经典理论形式系统的两个自变量，而 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 是形式系统的两个因变量。于是，从整个理论体系考虑

$$\bar{\exists}:(\rho,\mathbf{J})\mapsto(\mathbf{E},\mathbf{B}) \tag{1.2}$$

[3] 在中科院组织的电磁计算研讨会上，一些长期从事电磁计算的专家指出电磁计算中的一个普遍现象：如果泛定方程使用 2 阶形式的偏微分方程，计算结果往往比直接使用 1 阶形式的结果好；而如果使用积分方程计算，它的计算结果又会更好一些。其实，从偏微分方程的一般性原理考虑，这些现象正相合于此处所述的一般性道理，只不过人们往往完全热衷于纯粹数值计算方法的探讨，却忽略了数学基础的一些简单概念。

也就是说，经典理论希望定义于电磁场源与电磁场之间的映射必然存在逻辑不相容的问题。

如果局限于“时变电磁场”的特定命题，那么，即使暂时放弃逻辑推理的严谨性，按照目前计算电磁学的论述，基本方程组可以表示为如下所示的简单形式

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} / \varepsilon_0 + \partial \mathbf{E} / \partial t \end{cases} \tag{1.3}$$

此时，人们已经默认时变电磁场仅仅需要考虑“单个源项”的影响，而这个源项只能是变化中的电流源分布 $\mathbf{J}$。毫无疑问，如果需要把 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 视为两个独立变量，那么仍然存在与式（1.2）类似的问题，即

$$\bar{\exists} : (\mathbf{J}) \mapsto (\mathbf{E}, \mathbf{B}) \tag{1.4}$$

反过来说，这恰恰是时变电磁场数值计算的“实际处理”过程中，为什么总可以把 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 当作一对“对偶量”对待的缘故。

不仅于此，考虑到电荷守恒定律

$$\forall \mathbf{J} \overset{def.}{=} \rho \mathbf{v},\ \exists : \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,\ \ (\mathbf{J}, \rho, \mathbf{v}) \in D : (\mathbf{x}, t) \tag{1.5}$$

需要得到普遍满足。因此，对于此处讨论的“时变电磁场”而言，因为定义于空间域和时间域中的电流分布 $\mathbf{J}$ 处于变化之中，所以相应存在由该给定电流所诱导、并同样必须同时定义于空间域和时间域之中的变化电荷分布

$$\frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \neq 0 \mapsto \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho^*}{\partial t} \mapsto \rho^*(\mathbf{x}, t) \neq 0 \tag{1.6}$$

显然，这个被作为自变量出现的动态电流 $\mathbf{J}$ 所激发的动态电荷分布 ρ^*，与另一个同样被定义为自变量的给定电荷分布 ρ 完全不同，它们定义于两个完全不同的定义域之中，即

$$\rho^* \neq \rho, \quad \rho^* \in D : (\mathbf{x}, t), \rho \in D' : (\mathbf{x}) \tag{1.7}$$

并且，涉及“时变电磁场”问题，激发电荷分布 ρ^* 虽然需要被视为一个真实存在的物理量，但是这个物理实在并不“显式”出现在形式表述系统之中。当然，这才是计算电磁学所说在讨论“时变电磁场”问题时，可以完全不考虑 Maxwell 方程组中 Gauss 定律的根本原因。从形式逻辑的一般理念考虑，Maxwell 方程组中恰当方程的选择并不决定于人们的“主观”意志，而“客观”地依赖于需要描述的物理实在；此外，即使某一个泛定方程可以凭借“逻辑推理”的方法，推得另一种看似与其保持逻辑相容的另一种形式，但是，数学物理模型中的泛定方程与恰当边界条件本质上是一个不容分割的整体，因此仍然不允许随意变更泛定方程的形式，否则必然导致与被赋予特定物理内涵的边界条件不相匹配的问题。[4]

事实上，电磁场需要被视为一个物理上定义为“无质无形”的真实存在，与形形色色的“电磁介质”属于两个完全不同的概念。这样，应该像某些电磁场经典理论的著述往往特地指出的那样，需要把 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 看作是比 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 更为基本的两个物理学量。而且，不仅仅于此，考虑到 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 需要或能够与“力”构成某种直接关联，这两个物理量不允许直接定义在“无质无形”的电磁场之上，只可能逻辑地定义在置于电磁场中的“实验电荷”之上。[5]

[4] 从事电磁数值计算的研究者指出电磁计算在形式上显得过于繁杂和随意。其实，一个根本原因正在于对“数理方程理论”中这个基本道理的违背。然而，在破坏数学物理模型的整体性同时，又会不自觉地陷入另一个极端化的不当认识之中，忽视数学物理模型所描述特定“物质对象”的前提或“有限论域”的存在，总希望某一个“单独”的数学物理模型能够一以贯之地用于描述所有电磁现象。

[5] 当然，某些计算电磁学的著述指出电磁场中的“能量传递”计算通常比较真实，但指出“根据动量密度公式用于计算波导所得的结果非常复杂并且毫无物理内容”的事实时，一个最根本的原因则与此处所述一致：对于“无质无形”的电磁场而言，只可能与其它物质形式进行“能量（运动能力）”的传递和交换，动

正因为此，电磁场的经典理论在研究“静电场”和“静磁场”两个简单命题时，真正出现在各自恰当“数学物理模型 —— 偏微分方程边值问题”中的因变量并不是 **E** 和 **B**，而是它们的两个势函数 ϕ 和 **A**，并且，作为两个“独立映射”只需要定义于单纯的空间域之中

$$\left.\begin{array}{l}\rho \mapsto \phi \\ \mathbf{J} \mapsto \mathbf{A}\end{array}\right\} \in D:(\mathbf{x}) \tag{1.8}$$

显然，势函数与 **E** 和 **B** 相比显得较为抽象；然而，正因为抽象才可能与电磁场“无质无形”的形式特征保持一致。

毫无疑问，在考虑由“单个”动态电流 $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ 所激发的时变电磁场，并且需要将其视为一个唯一自变量的时候，能够与其保持逻辑相容的仍然只可能是属于动态电磁场的势函数。当然，动态电磁场的源和势函数必须同时定义在“空间域”和“时间域”之中

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) \mapsto \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x},t), D:(\mathbf{x},t) \tag{1.9}$$

此时，这个待定的形式表述系统不仅仅必须保证自变量和因变量逻辑相容；而且，作为一个复杂系统还必须能够“逻辑地”恢复为描述静磁场的简单系统。[6]

如果在由电流源激发的时变电磁场中安置一个实验电荷，那么，不难推得定义于该实验电荷之上的 **E** 和 **B**，即

$$\begin{cases}\mathbf{B} = \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{E} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t}\end{cases} \tag{1.10}$$

这样，矢量势 $\boldsymbol{\Psi}$ 尽管仍然只是一个向量函数，却为人们提供了相当丰富的物理内涵。特别是电磁场还存在独立的“静止电荷”分布 ρ 时，根据叠加原理

$$\begin{cases}\mathbf{B} = \nabla \times \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{E} = -\nabla\phi + \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t}\end{cases} \tag{1.11}$$

从而保证整个形式系统逻辑相容。

1.3 Lorentz 变换的“约定论”基础

在几乎所有的电磁计算学的著述中，都把 Lorentz 变换以及根据该变换构造的波动方程

$$\begin{cases}-\nabla^2\phi + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho \\ -\nabla^2\mathbf{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{J} \\ (\nabla\cdot\mathbf{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = 0)\end{cases} \tag{1.12}$$

作为计算电磁场的重要形式基础。其实，宋文淼先生早在 1991 年出版的著述中已经提出：

量、动量矩不过是西方学者主观臆测而得的“伪概念”而已。

[6] 从简单系统到复杂系统的过程，必然是构造性的；相反，从复杂系统到简单系统则必须是逻辑的，最终结果可以视为对复杂系统所构造“约束映射”的象。

只有矢量位和标量位仍然不能把 Maxwell 方程组变成分离的标量偏微分方程组。要做到这一点必须假定一个 Lorentz 规范。但是，Lorentz 规范既没有物理上的依据，在数学上也无法证明引入这一规范后的解就一定时原方程唯一的精确解。从一般哲学理念考虑，无论是 Coulomb 规范还是 Lorentz 规范，它们本质上都同属“ 约定论 ”的范畴，破坏了演绎逻辑的基本规则，并且两种规范已经将自己处于“ 互为否定 ”的逻辑自悖之中。

1.4 经典波动方程与边界条件的“ 逻辑不相容 ”问题

衡量描述“ 物质场 ”的数学物理模型是否恰当，远远不只是未知量数与方程数是否一致，而是需要考核“ 泛定方程与边界条件 ”之间能否逻辑相容的问题。[7]

显然，对于式（1.12）所示、由 Laplace 算子所构造关于矢量势 **A** 的波动方程而言，能够与其保持逻辑相容的边界条件是

$$\begin{cases}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\\ \partial\mathbf{A}(\mathbf{x},t)/\partial n\end{cases}\quad \mathbf{x}\in b.$$

于是，与物理上可能提供的边界条件

$$\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A}(\mathbf{x},t)=\mathbf{j},\ \ \mathbf{x}\in b. \tag{1.13}$$

无法逻辑相容。事实上，这正是目前电磁数值计算只能处理‘ 无穷大域 ’中经典形式的 Poisson 波动方程的原因。

1.5 双旋度算子的“ 独立性 ”、“ 完整性 ”与“ 欠定性 ”问题

考虑到古典 Poisson 波动方程与边界条件无法逻辑相容的问题，人们提出无法回避由 Maxwell 方程组直接导得的形式表述

$$\begin{cases}-\nabla^2\phi=\rho-\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{A}\\ \nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\dfrac{1}{c^2}(\mathbf{J}+\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla\phi-\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2})\end{cases} \tag{1.14}$$

并且，在默认仅仅考虑电流源 **J** 的特定情况下，考虑如何求解“ 单个 ”由双旋度算子所构造波动方程问题，即

$$\begin{cases}-\nabla\phi\equiv 0\\ \quad\Rightarrow\\ \nabla\times\nabla\times\mathbf{A}+\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\dfrac{1}{c^2}\mathbf{J}\end{cases} \tag{1.15}$$

但是，需要指出：如果仅仅不考虑电荷 ρ 的存在及其所激发的电场时，并不能由式（1.14）直接推得式（1.15）所示关于矢量势 **A** 的波动方程。正如许多著述已经指出的那样，因为矢量势的散度$\nabla\cdot\mathbf{A}$ 并不一定恒为零，所以即使电荷分布 ρ 恒为零，根据经典电磁场理论针对

[7] 所谓的线性泛函与一般的线性函数是两个隐含本质差异的概念。与一般函数线性方程组可解性相关的规律，不能简单推广之远比线性方程所讨论命题要大得多，涉及线性偏微分方程定解问题的另一个“ 有限论域 ”之中。

Maxwell 方程组所做的习惯性解释，依然需要考虑涉及标量势 ϕ 的非齐次微分方程。因此，反过来恰恰可以说明，在计算电磁学处理实际问题时，早已把经典电磁场理论体系中的标量势 ϕ 和矢量势 $\mathbf{A}$ 当作两个独立的势函数对待，从而与笔者以往所做的理论分析保持一致。

直接求解双旋度算子构造的波动方程，表明需要把双旋度算子“ $\nabla\times\nabla\times$ ”看作是一个具有“独立性”的矢量微分算子，也仅仅于此才可能与式（1.13）的边界条件逻辑相容。可以相信，文献[1]构造计算方法的基础正是此处所说的这个基本认定。但是，在求解双旋度算子构造的波动方程时，需要注意如下所示的问题：

（1） 使用类似于 Helmholtz 分解的方法，将待定的矢量势分解为若干分量函数的叠加并没有本质意义的改变；
（2） 定解问题中的边界条件是一个整体，边界条件的分解往往会引起“超定”问题，除非仅仅处理并不始终真实存在的“齐次边界条件”特例；[7]
（3） 双旋度算子在数学上是一个“欠定”算子。在需要直接求解矢量势本身而不仅仅是矢量势的旋度时，由单个双旋度算子构造的偏微分方程同样是欠定的；反过来，当且仅当只需要求解矢量势的旋度时，形形色色的“正则变换”才可能得以成立。

1.6 隐含于“时域差分法”中的逻辑不当与计算复杂性问题

从纯粹数值计算的角度考虑，如果某一个微分方程构造的定解问题是恰当的，那么，它总可以通过转化为差分形式近似计算场分布。或许正因为此，在介绍以“Lee 氏网格”为基础的“时域有限差分法”时，王长清先生曾经作了这样的评价

> 时域有限差分法直接从依赖于时间变量的 Maxwell 方程出发，不需要任何导出方程，是一种简单、直观的时域方法。时域有限差分法只需作一次计算即可获得宽频带的丰富信息，其广泛的应用范围是其它方法无法比拟的。

同样，人们可以从这个评价中得到许多正确的启示。

事实上，目前的时域有限差分法的形式基础是式（1.3）所示的一阶偏微分方程组

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t \\ c^2\nabla\times\mathbf{B} = \mathbf{J}/\varepsilon_0 + \partial\mathbf{E}/\partial t \end{cases} \tag{1.16}$$

而作为泛定方程，该方程组与式（1.15）中由双旋度算子所构造的波动方程，即

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{J} \tag{1.17}$$

保持逻辑相容，尽管两种泛定方程绝不同一。也就是说，如果允许忽略待定函数“高阶导数”的差异，并且着眼于电磁场由微分方程所描述的“内部”特征，即仅仅考虑由“泛定方程”设定的基本物理规律时，可以认为两种数学表述之间没有根本矛盾。

但是，微分方程与边界条件作为构造数学物理模型的两个基本部分，它们是一个不容分割的整体。因此，与以上分析一致，目前使用的“时域有限差分法”在处理“时变电磁场”问题时，必然隐含以下问题：

（1） 在仅仅存在电流源时，式（1.16）所示的泛定方程存在 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$（或目前通常使用的 $\mathbf{H}$）两个因变量；与此同时，仅仅存在式（1.13）所示一个被唯一赋予特定物质内涵的边界条件。因此，本质上仍然无法克服第一个问题所述，泛定方程与边界条件之间不匹配的问题。而且，即使不考虑逻辑严谨性，允许继续沿用“无电荷分布”时的静电场间断面条件

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

但是，正如人们已经注意到的那样，由变化电流所激发“时变电磁场”的矢量势 **A** 并不恒等于零，故而这个隶属于“静电场”的边界条件用以处理一般的“时变电磁场”时必然造成失真；

(2) 基于同样的原因，以式（1.16）为基础的数学模型，无法描述矢量势散度$\nabla\cdot\mathbf{A}$不等于零一般性情况；

(3) 此外，因变量（**E**, **B**）中未知标量分量是自变量 **J** 的二倍。因此，即使不考虑这个计算模式用于一般动态电磁场时隐含的逻辑不自洽问题，由于需要同时求解的待求变量增加了一倍；

(4) 如果必须按照目前习惯的处理方式，需要把 **E** 和 **H** 定义为形式系统的两个因变量，这意味着在构造“场方程”的同时，就必须同时考虑电磁介质的“本构”关系，从而使求解场方程的“复杂性”相应增大。为什么不能为电磁介质构造一个独立的程序包，以简化计算呢？

2. 双旋度 Poisson 方程的两类定解问题与恒稳磁场模型的严谨化

正如许多从事电磁场研究的学者已经认识和指出的那样，求解动态电磁场的问题本质上是如何处理旋度算子乃至双旋度算子所构造的数学模型的问题。局限于纯粹“形式逻辑”的角度考虑，求解“时变电磁场”之所以会面临一系列的困难，主要渊源于与双旋度 Poisson 方程相关的一系列形式逻辑并没有真正得到解决，以至于至今无法形成一种具有“一般性意义”的计算模式。

在自然科学研究中，不能把形式表述系统视为一成不变的形而上学，形式系统永远只允许条件地存在，并且，根本依赖于需要描述的物质对象自身。因此，在处理由“电流源”所激发的时变电磁场时，本质地决定于电荷“不生不灭”的物理真实，物理学实验的电流几乎只能以“环形电流”的方式出现。进而，在需要形式地表现电流所激发电磁场的时候，以某种方式蕴含“环形状”抽象特征的双旋度算子“$\nabla\times\nabla\times$”，一定自然地出现在相关形式表述中。于是，定义于 3 维 Euclid 空间的双旋度 Poisson 方程

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{f} \quad \mathbf{x}\in V \subset R^3 \tag{2.1}$$

成为相关物理学陈述一个无法回避的数学命题，并且，与一般 Laplace 算子“∇^2”所构造的微分方程相比，双旋度 Poisson 方程具有完全不同的数学特征。换句话说，双旋度算子是一个被赋予独立意义的微分算子。

经典理论在处理双旋度 Poisson 方程，并且需要直接求解势函数 $\mathbf{\Psi}$ 本身而不仅仅是它的旋度$\nabla\times\mathbf{\Psi}$ 时，不同的“正则规范”只是一系列处于“互否定”中的不同人为约定。事实上，将 Maxwell 构造的一阶偏微分方程组转化为二阶形式的泛定方程，从而与一阶的边界条件可能共同构造一个可以恰当求解的定解问题，并进而将其写作一般的向量 Poisson 方程的过程中存在太多逻辑悖论：正则规范得以存在的逻辑前提是无需求解矢量势本身而只需求解矢量势的旋度，故而不能用于直接刻画矢量势的波动方程；随着双旋度形式的偏微分方程变化为 Laplace 算子形式的微分方程的，正则规范已经失去自身得以存在的基础；此外，在构造双旋度 Poisson 方程两类积分表述时，经典理论隐含“逻辑不相容”问题，进一步引起数学物理模型构造中的认识歧义。[7]

可以做出数学上的严格证明：属于双旋度 Poisson 方程一系列数学特性中，一个最重要的特性在于待求函数的“欠定性”特征。进一步说，如果只有式（2.1）的双旋度 Poisson 方

程作为数学模型的控制方程（泛定方程），该数学模型成为“恒欠定”的形式系统。仅仅在无需求解矢量势 $\mathbf{\Psi}$ 本身而仅仅关注矢量势旋度$\nabla\times\mathbf{\Psi}$ 的时候，一个恰当的定解问题为

$$? = \nabla\times\mathbf{\Psi} \Rightarrow \begin{cases} \nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi} = \mathbf{f} \\ (\nabla\cdot\mathbf{\Psi} = \vartheta) \\ \mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{\Psi} = \mathbf{h} \qquad \mathbf{x}\in\partial V \end{cases} \tag{2.2}$$

其中，ϑ 为包括零在内的任意给定标量函数。

但是，像描述时变电磁场时需要使用式（1.10）所示的方程，不仅仅需要关注矢量势的旋度还需要直接了解矢量势本身的时候，即

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{\Psi} \\ \mathbf{E} = \dfrac{\partial\mathbf{\Psi}}{\partial t} \end{cases}$$

另一个具有“独立”形式意义，并且有待被赋予特定“物理内涵”的数学模型为

$$? = \mathbf{\Psi} \Rightarrow \begin{cases} \nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi} = \mathbf{f} \\ \nabla\cdot\mathbf{\Psi} = \vartheta \\ \mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{\Psi} = \mathbf{h} \qquad \mathbf{x}\in\partial V \end{cases} \tag{2.3}$$

需要注意，与式（2.2）所示数学模型的根本差异在于：这个数学模型中的标量函数 ϑ 已经不再是可以人为任意给定的标量函数，而同样需要属于自己的“实体性”基础，否则，求得矢量势 $\mathbf{\Psi}$ 不仅在形式上无法满足“唯一性”条件，也相应失去了确定的物理内涵。

由于涉及双旋度 Poisson 方程的一系列数学基础问题没有得到解决，在如何为静磁场理论体系构造恰当数学物理模型方面存在大量需要“严谨化”的问题。考虑到作为构建静磁场理论体系全部基础，由下述 Biot-Savart 公式所表示的经验事实

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0\int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x})\times\mathbf{r}}{r^3}dV \tag{2.4}$$

以及相关等价性表述以及在“恒定电流”特定条件下蕴含的基本数学特征

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla\times\mathbf{A} : \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu_0\int_V \mathbf{J}\frac{1}{r}dV \\ : \vartheta = \nabla\cdot\mathbf{A} = \int_V \frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{J}dV \end{aligned} \tag{2.5}$$

一个允许定义在静磁场矢量势 $\mathbf{A}$ 之上，被赋予“物理内涵（不是作为正则假设）”的数学模型为

$$? = \mathbf{A} : \begin{cases} \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} \\ \nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} \end{cases} \tag{2.6}$$

虽然这个以求解矢量势 $\mathbf{A}$ 本身为目标的数学模型对于解决“静磁场”问题或许是多余的，但是只有该数学模型才可能成为进一步探讨变化电流激发动态电磁场或电磁波的形式基础。[9]

3. 波动方程一种“独立”形式的提出与相关定解问题的恰当构造

波动现象属于大自然一种普遍存在的物理实在。在大部分经典理论的习惯性陈述中，如

下所示的双曲型二次偏微分方程称之为波动方程

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(\mathbf{x}, t) \tag{3.1}$$

并指出该方程能够也必须用来描述所有的波动现象。[5]

但是，这种认定方法不符合物理学不同学科已经发现不同波动方程的实际状况，而且这种“形而上学”界定方法明显存在“循环定义”的问题。与其不同，《McGraw-Hill 物理百科全书》则将“描述物理量对空间和时间依赖关系”的偏微分方程界定为波动方程。显然，这种基于物理实在本身的界定才是一个恰当的形式定义。于是，与 Einstein 所引入“原时和钢尺”必需的“独立性”完全一致，如果认识到时间域和空间域同样必需的独立性，那么，当一个函数允许同时定义在时间域和空间域之中，并且相应能够为不同微分方程所构造的恰当定解问题所描述，进而以某种方式彼此“耦合”成一个同时定义于时间域和空间域之中形式表述时，这个形式表述原则上就是通常所说的波动方程。

因此，针对定义于“时间域”之中的定解问题以及定义于“空间域”中由双旋度 Poisson 算子构造的定解问题

$$\left.\boldsymbol{\Psi}(t): t \in R \quad \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2} = \mathbf{g} \\ \boldsymbol{\Psi}\big|_0 = \boldsymbol{\Theta}, \dfrac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t}\Big|_0 = \boldsymbol{\Omega} \end{matrix}\right\} \sim \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}): \begin{cases} \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{f} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{\Psi} = \vartheta & \mathbf{x}\in V \subset R^3 \\ \mathbf{n}\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{h} \end{cases} \tag{3.2}$$

相对应，一定能构造一个允许同时定义于“空间域”和“时间域”之上、并且本质上处于“耦合”之中的恰当数学物理模型

$$? = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t): \begin{cases} \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2} = \mathbf{f} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{\Psi} = \vartheta & \mathbf{x}\in V\subset R^3, t\in R \\ \mathbf{n}\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{h} \\ \boldsymbol{\Psi}\big|_{t=0} = \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Psi}_t\big|_{t=0} = \boldsymbol{\Omega} \end{cases} \tag{3.3}$$

事实上，此处的这个形式表述是一个具有“独立意义”并且在形式上满足“逻辑恰当性”要求的数学物理模型，不仅仅在形式上能够大致包容目前计算电磁学在处理变化电流激发“时变电磁场”实际使用的不同计算方案，而且还能够满足《McGraw-Hill 物理百科全书》针对“波动方程”曾经构造的一般性定义，形式地用来描述“一个记为 $\boldsymbol{\Psi}$ 的物理量在空间域和时间域进行变化”时一种彼此依存并且具有确定性意义的逻辑关系。

或许值得重复指出，如果承认式（3.3）重新构造的动态数学模型，相应为式（3.2）所示分别定义于“时间域”和“空间域”中的两个“独立”泛定方程构造了一种“耦合”关系，那么，涉及到这个动态数学模型的“可计算性”问题，逻辑上重新归结为式（3.2）所示的数学模型“是否可解或是否恰当”的问题。其中，定义于时间域中的定解问题过分简单，至于另一个“单独”定义于空间域中的数学模型同样已经证明是可解或恰当的。[8]

4. 变化电流激发动态电磁场的数学物理模型

经典电磁场理论中，动态电磁场一直被“人为想象”成相互激发中的变化电场和磁场。

[8] 与双旋度 Poisson 方程相关的结果以及数学证明参见文献[7]中的论述。此外，笔者的工作助手针对该命题所做的数值计算验证结果早已公开发表。

但是，并不存在与独立电荷对应的独立磁荷，所以在这个根深蒂固的习惯性认识难免流于空乏的同时，与实际上应该隶属于“技术应用”范畴的计算电磁学不同，经典电磁场理论从来没有探讨过“动态电流”怎样激发“动态电磁场”或者在某一个恒定电磁场背景下如何激发“电磁波”的问题。

动态变化电流无疑属于物理实在，动态电流所激发的动态电磁场同样是真实的物理存在。因此，必须重新建立这个“客观存在”却因经典电磁场理论构建者“主观理念”不当而被丢弃的重大命题。根据演绎逻辑可推知：数学物理模型本质上只允许是“构造性”的，描述动态电磁场的恰当模型不能由描述“静态电磁现象”的简单理论体系逻辑地推得。并且，除了确认经典理论自变量(ρ, **J**)和因变量(**E**, **B**)间的逻辑不相容乃至定义域的明显不当外，还需要认识到在物理上被赋予“普适意义”的电荷守恒定律

$$\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot\mathbf{J}=0 \tag{4.1}$$

以及变化电流 **J** 激发的电荷密度变化$\partial\rho/\partial t$ 尽管真实存在，但是，对于此处的形式系统在逻辑上却是多余的。进而，虽然变化中 **E** 和 **B** 必须逻辑地定义于“实验电荷”之上，但是如果仍然希望继续沿用 Maxwell 方程组的形式，又同时承认自变量 **J** 必需的独立性，并注意到 **E** 和 **B** 并不直接属于电磁场而必须定义于实验电荷和实验电流之上的基本事实，那么，在时间域和空间域仍然必须存在如下所示的“逻辑隶属”关系

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t)>>\begin{cases}\nabla\times\mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t\\ \nabla\cdot\mathbf{B}=0\\ c^2\nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{J}/\varepsilon_0+\partial\mathbf{E}/\partial t\end{cases} \tag{4.2}$$

此式表明：当人们希望借助于 **E** 和 **B**（或 **H**）之间的一阶微分变化关系，共同刻画电磁场的物理学状态时，这个形式表述中的所有量仅仅需要具有纯粹的“形式”意义，并且这些形式量仍然只可能逻辑地从属于动态变化电流 **J**(**x**, *t*)。事实上，这个形式表述不仅是目前“时域有限差分法”得以存在的基础，而且如果允许仅仅从“泛定方程”的角度考虑，它还与式（3.3）所示数学模型中的双旋度形式波动方程

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Psi}}{\partial t^2}=\mathbf{f}\quad \mathbf{x}\in V\subset R^3,t\in R \tag{4.3}$$

保持一致。

但是，参照上述分析，即考虑到单个双旋度算子内蕴的“欠定性”特征，以及泛定方程与边界条件如何逻辑相容的基本问题，对于由动态变化电流 **J**(**x**, *t*)所激发时变电磁场，一个相关的完整数学模型只能是

$$\begin{cases}\nabla\times\nabla\times\mathbf{\Psi}+\partial^2\mathbf{\Psi}/c^2\partial t^2=\mu_0\mathbf{J}\\ \nabla\cdot\mathbf{\Psi}=\vartheta\\ \quad\mathbf{n}\times\nabla\times\mathbf{\Psi}=\mu_0\mathbf{j}\qquad \mathbf{x}\in\partial V\\ \quad\mathbf{\Psi}=\mathbf{\Psi}_0,\mathbf{\Psi}'=\mathbf{\Psi}'_0\qquad t=0\end{cases}\quad :\ \vartheta(\mathbf{x},t)=\mu_0\int_V\frac{1}{r}\nabla\cdot\mathbf{J}dV \tag{4.4}$$

除了相应存在

$$\begin{cases}\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=\nabla\times\mathbf{\Psi}\\ \mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\partial\mathbf{\Psi}/\partial t\end{cases}\quad \mathbf{x}\in V\subset R^3,t\in R \tag{4.5}$$

仍然与式（2.5）所示静磁场数学模型保持严格逻辑相容，从而对变化电流 **J**(**x**, *t*)所激发“动态电磁场”问题构造了一个可以求解的恰当数学模型。

5. 小结

限制在于数值计算由“变化电流源”所激发“动态电磁场”的特定论域，并且，确认目前计算电磁学已经实际使用的另一个“前提性”认定：允许将电荷和电流激发的电磁场视作“独立”存在的两个分量场，在这些前提认定的基础上，将以上分析小结如下：[9]

（1）以 **E** 和 **B**（或 **E** 和 **H**）作为因变量，无论是直接求解式（1.16）所示 Maxwell 方程组中与动态变化项相关的微分方程，还是求解由它们重新构造的双旋度算子形式的 Poisson 波动方程，都存在因变量和自变量并不匹配，控制方程增加了一倍，从而人为增大了计算工作量的问题。

除了这个几乎可以直观发现的不足以外，更为重要的是直接以 **E** 和 **B** 作为因变量的处理方法实际隐含的逻辑不当问题。

首先，正如著述[2]已经指出的，对于变化电流 **J** 所激发的动态电磁场而言，时变电磁场矢量势的散度乃至 **E** 的散度在“一般情况”下并不恒等于零，而属于这个基本认定一个自然的逻辑推论是：边界上的 **E** 无法始终满足式（1.18）所示的齐次边界条件。因此，经典理论不可能为因变量 **E** 构造一个恰当并具有物理内涵的边界条件；

其次，不难做出严格的数学证明，双旋度算子“$\nabla\times\nabla\times$”内蕴“欠定性”特征；如若不然，形形色色处于互否定之中的“正则规范”也不允许存在。因此，无论是求解双旋度算子形式的波动方程，还是直接求解与其在“数值计算”方面保持大致一致的 Maxwell 方程组中两个一阶的动态变化方程，其实都存在无法完整刻画待定变量（散度部分）以及形式系统并不真正完整的问题，只是在“空间域”没有变化中电流的特定场合，这个“逻辑不当”和“物理失真”并存的问题往往被掩盖了。反过来说，在需要处理某些复杂问题时，人们所指出某些“精度不够”的问题并不能归咎为数值计算的不当，而根本

（2）在用以描述“时变电磁场”的形式系统中，需要确立仅仅与变化电流源 $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$构成确定逻辑关联、即逻辑上只允许隶属于“无质无形”电磁场的矢量势 $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{x}, t)$作为形式系统“唯一”因变量的判断，进而在此基础上构造式（4.4）所定义一个形式逻辑上完备的数学物理模型，并通过式（4.5）与习惯使用的电磁学量 **E** 和 **B** 等构成恰当的逻辑关联。从这个“一般性”的数学模型出发的数值计算，不仅完全吻合于目前计算电磁学处理不同具体问题的特例，避免上面提出的一系列不足，而且原则上可以应用于不同的场合，灵活运用一般“计算数学”为求解“偏微分方程定解问题”所提供的一系列保持逻辑相容的特定计算方法。

最后需要再次指出：在自然科学中绝没有可以当作“普适真理”的体系，因而不可能存在形式上一成不变的数学物理模型。形式系统的具体表述形式只可能逻辑地决定于被描述的物理实在。因此，本文构造的形式建树以及针对计算特征所做的分析，原则上只能适用于“单个”电流源激发的时变电磁场。但是，一切物理上真正合理的形式表述必须严格逻辑相容，并且在原则上不可能出现不可计算的问题。

参考文献

[1] 宋文淼，张晓娟，徐诚，电磁波基本方程组，科学出版社，北京，2003

[2] 王长清，现代计算电磁学基础，北京大学出版社，北京，2006

[9] 文献[9]曾经花费大量篇幅论述静止电荷 $\rho(\mathbf{x})$和电流分布 $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$作为两个自变量必须满足的“独立性”要求，以及为它们分别激发的电磁场在形式上必然存在的“独立性”特征。众所周知，如果完全依循电磁场的经典理论，即使不存在静止电荷分布 ρ，但是对于变化电流 **J** 所激发的“时变电磁场”而言，因为经典定义的矢量势散度$\nabla\cdot\mathbf{A}$ 并不恒等于零，所以还必须同时求解以矢量势散度时间变化率$\partial\nabla\cdot\mathbf{A}/\partial t$ 为源项、关于标量势的标量势 Poisson 方程。这一事实再次表明，以“逻辑自洽性”作为基本原则对现代自然科学体系进行系统梳理的必要性和应用价值。

[3] 郭硕鸿，电动力学，高等教育出版社，北京，1997
[4] 宋文淼，并矢格林函数和电磁场的算子理论，中国科学技术大学出版社，合肥，1991
[5] 数学百科全书（第 5 卷），科学出版社，北京，2000
[6] S. P. Parker，物理百科全书，科学出版社，1998
[7] 杨本洛，经典流体运动分析，科学出版社，北京，1996
[8] 杨本洛，自然科学体系梳理，上海交通大学出版社，上海，2005
[9] 杨本洛，量子力学形式逻辑和物质基础探析 —— 现代自然科学基础的哲学和数学反思，上海交通大学出版社，上海，2006

Preliminary thinking about the mathematic foundation of modern computational electromagnetism

— The ninth part of formal-logic study about rationally rebuilding electromagnetic theory

Yang Benluo

Natural Science Foundation Research Group, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China

Email: blyang@sjtu.edu.cn

Abstract: Computation of time-dependent electromagnetic field excited by a varying current distribution is the hardcore of modern computational electromagnetism. However, differing from other computing forms of field problem described by partial differential equations, the computation of electromagnetic field did not really use series of the general, abstract and formalized methods supplied directly by computational mathematics. And, unfortunately, people have to construct forms of different models upon special physical connotation provided by classical electromagnetic theory and then make computation. Such a method of computation can also arrange forms particular propositions suitably. But, it cannot be regarded as a universal method and, not only that, is usually implicates some logic mistakes and physical distortion. The reason would be: time-dependent electromagnetic field lacks of a united mathematical physical model that can guarantee both the partial differential equations and boundary conditions consistent in logic. In reverse, if a general mathematical model is perfect in logic, it can not only allow us to freely use the computation methods supplied by computational mathematics but also provide more full and more exact information about electromagnetic field.

Key words: logic, time-dependent electromagnetic field, exact mathematical model, computation