保险精算中双损失环境的“ 独立性 ”问题

郑振龙 李明

（厦门大学经济学院金融系，福建厦门 361005）

内容提要：保险精算中，双损失环境理论对于寿险风险分析和风险控制具有极其重要的意义，而且也是进行寿险产品设计的基础。本文在双损失环境理论的基础上，用概率论的方法，尝试对 ${}_t p_x^{(\tau)}$ 等于 ${}_t p_x^{\prime(d)}$ 与 ${}_t p_x^{\prime(w)}$ 的乘积成立的独立性条件给出新的解释，并对一些学者的“ 独立性是矩估计成立的充分条件 ”等观点提出了不同的看法，并证明了基本矩关系不依赖于独立性的假设而恒成立。

关键词：生存模型　　双损失环境　死力 矩估计

中国图书分类号：　　　文献标识码：　　　文章编号：

生存模型是保险精算理论的重要组成部分，其中单损失环境和双损失环境的理论更是构造生命表的基础。《数量经济技术经济研究》杂志分别于 2002 年第九期和 2004 年第四期刊登了张涤新教授的《保险精算中单损失和双损失环境的一些重要理论辨析》[1]（以下简称张文）一文以及杨智元等三位学者的《保险精算中单损失和双损失环境的一些重要理论再辨析》[2]（以下简称杨文），拜读以上两文之后，我们在感佩几位学者严谨的治学态度与善于发现问题的治学精神的同时，对几位学者论述的问题有一些观不同的观点和看法，形诸于下与几位学者共同探讨。[1]

收稿日期：2005-04-12

基金项目： 教育部优秀青年教师资助计划“ 中国信用风险度量和控制模型 ”项目、教育部人文社会科学研究 2003 年度博士点基金研究项目“ 中国利率类金融产品的设计和定价 ”（03JB790016）、福建省社科“ 十五 ”规划（第二期）项目（2003B069）的资助。本文观点仅代表作者个人观点。

作者简介：郑振龙（1966-），男，教授，博导

李明（1982-），女，03 级硕士研究生

在只有死亡和撤出的双损失环境下，London[3]的结论为：如果随机事件死亡和撤出是独立的，则 ${}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x^{'(d)}\,{}_tp_x^{'(w)}$。

我们认为，正如张教授所说，首先，随机事件死亡和撤出不是独立的，其次 ${}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x^{'(d)}\,{}_tp_x^{'(w)}$ 式的得出与两随机事件独立这之间不存在什么关系。

生存模型理论中，${}_tp_x^{'(j)} = \exp(-\int_0^t u_{x+s}^{(j)}ds)$，此为 ${}_tp_x^{'(j)}$ 的定义式。 (1)

${}_tp_x^{(\tau)} = \exp(-\int_0^t u_{x+s}^{(\tau)}ds)$，此为 ${}_tp_x^{(\tau)}$ 的定义式。 (2)

在人寿保险应用的双损失环境中，J 在 $\{d,w\}$ 中取值，由于被保险人死亡的同时不可能作出撤出缴付保险费的决定，因此，显然随机事件 J=$\{d\}$ 和随机事件 J=$\{w\}$ 是互斥的。由概率论可知，对于事件 A，B，若有 P（A）>0,P(B)>0,则有，当 AB=$\varnothing$ 即 AB 互不相容时，A 与 B 不独立。由此可知，随机事件死亡和撤出必然不是独立的。

当随机事件 J=$\{d\}$ 和随机事件 J=$\{w\}$ 互斥时，由 $u_x^{(j_i)}$ 和 $u_x^{(\tau)}$ 定义可知：[4]2

$$u_x^{(\tau)} = \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P(x<T\le x+\Delta t \mid T>x) = \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P(x<T\le x+\Delta t, J=d \mid T>x) + \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P(x<T\le x+\Delta t, J=w \mid T>x) = u_x^{(d)} + u_x^{(w)}$$

$${}_tp_x^{(\tau)} = \exp\left[-\int_x^{x+t} u_y^{(\tau)}dy\right] = \exp\left[-\int_x^{x+t}(u_y^{(d)}+u_y^{(w)})dy\right] = {}_tp_x^{'(d)}\,{}_tp_x^{'(w)}$$

由以上证明可知，只要死亡与撤出是互不相容的事件，便有 ${}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x^{'(d)}\,{}_tp_x^{'(w)}$ 式的成立。

如果事件 $j_{1,}j_2$ 不互斥，而是有交集，例如胆结石容易引发胰腺炎，用 j_1 代表事件死于胆结石，j_2 代表事件死于胰腺炎，此时有：P（J=$\{j_{1,}j_2\}$）=P（$J=\{j_1\}$）+P（$J=\{j_2\}$）-P（$\{j_1\}\cap\{j_2\}$），相应地，

$$u_x^{(\tau)} = \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P(x<T\le x+\Delta t, J=j_1 \mid T>x) + \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P(x<T\le x+\Delta t, J=j_2 \mid T>x) - \lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P(x<T\le x+\Delta t, J=j_1\cap j_2 \mid T>x)$$

$=u_x^{(j_1)}+u_x^{(j_2)}-u_x^{(j_1\cap j_2)}$，这时 ${}_tp_x^{(\tau)}={}_tp_x^{'(j_1)}\,{}_tp_x^{'(j_2)}$ 式就不成立了，必须要再乘一个调整项。但显而易见，杨文中 ${}_tp_x^{(\tau)}={}_tp_x^{'(j_1)}\,{}_tp_x^{'(j_2)}\,{}_tp_x^{'(j_1j_2)}$ 的表示方法是不对的，调整因子不能写成 ${}_tp_x^{'(j_1j_2)}$ 的形式。

如果事件 $j_{1,}j_2$ 独立，例如，假如患心脏病与患肝炎之间互不影响，用 j_1 代表事件死于心脏病，j_2 代表事件死于肝炎，此时 P（ $\{j_1\}\cap\{j_2\}$ ）= P（$J=\{j_1\}$）*P （ $J=\{j_2\}$ ），二者之间是独立的。这时，仍与上面一样有

$$u_x^{(\tau)}=\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P(x<T\le x+\Delta t,J=j_1\,|\,T>x)+\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P(x<T\le x+\Delta t,J=j_2\,|\,T>x)-\lim_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}P(x<T\le x+\Delta t,J=j_1\cap j_2\,|\,T>x)$$

$=u_x^{(j_1)}+u_x^{(j_2)}-u_x^{(j_1\cap j_2)}$ 成立，但这时仍然不能得出式 ${}_tp_x^{(\tau)}={}_tp_x^{'(j_1)}\,{}_tp_x^{'(j_2)}$。

因此随机事件死亡和撤出互斥而不是独立是此式成立的充分条件。

但是，从 ${}_tp_x^{'(j)}$ 的定义式（1）中可以看出，在研究 ${}_tp_x^{'(j)}$ 时，只考虑因素 j 的死力 $u_{x+s}^{(j)}$ 而摒除了其他所有因素的影响。也就是说，这时可以当作除了 j 之外的其他一切导致损失因素的影响都不存在，仅把因素 j 看成是导致损失的唯一因素。 在这种情况下，${}_tp_x^{'(j)}$ 表示直到时间 t 时没有因为因素 j 而损失的概率。而由 ${}_tp_x^{(\tau)}$ 的定义式（2）可以看出，${}_tp_x^{(\tau)}$ 表示直到时间 t 还生存的概率。

依照这样的解释，双损失环境中，${}_tp_x^{'(d)}$、${}_tp_x^{'(w)}$ 的含义分别为在只有原因 d 或 w 影响下没有因原因 d 或 w 损失的概率。用事件Ａ表示在只有因素 d 影响时存活到时间 t，则有 P(A)= ${}_tp_x^{'(d)}$；用事件Ｂ表示在只有因素 w 影响时存活到时间 t,则有 P（B）= $p_x^{'(w)}$，那么，事件ＡＢ＝在因素 d、w 影响下存活到时间 t，P（AB）= ${}_tp_x^{(\tau)}$。由概率论的基础理论，可知，P（AB）=P（A）P（B|A）=P（B）P（A|B）。在 A、B 事件独立时，有 P（AB）=P（A）P（B）成立，独立性是此式成立的充要条件。将此基础理论应用到双损失环境下，则显然事件独立性是（4）式成立的充要条件。当 ${}_tp_x^{'(d)}$、$p_x^{'(w)}$ 互相独立时，${}_tp_x^{(\tau)}$ 可写成 ${}_tp_x^{'(d)}\,p_x^{'(w)}$。因此，我们猜想，London 所说的独立或许是说事件 A、B 的独立吧。

值得一提的是，以上对双损失环境下“误区 2”的分析推广到多重损失条件下也是成立的。

然而，杨文中在第二部分承认了张教授所说的死亡和撤出是互斥的，在其证明中也用到了互斥的条件，然令人百思不得其解的是，在本文所讨论的问题中明

明死亡和撤出是互斥就不能是独立的，杨文却偏偏又在第一部分让死亡和撤出两事件独立，而且竟然认为死亡和撤出事件的独立性是基本矩关系成立的充分条件，这实在是匪夷所思。下面我们将证明，基本矩关系是恒成立的。

双损失环境中，定义 ${}_tq_x^{(d)} = P(x < T \le x+t, J = d \mid T > x)$，表示某人在年龄 x 活着，在年龄 x+t 之前死亡的概率。同理，可定义 ${}_tq_x^{(w)}$。假设 ${}_tq_x^{(d)}$ 关于 t 的导数在 $(0,+\infty)$ 上存在且连续，则 $d\,{}_tq_x^{(d)} = {}_tp_x^{(\tau)} u_{x+t}^{(d)} dt$，${}_sq_x^{(d)} = \int_0^s {}_tp_x^{(\tau)} u_{x+t}^{(d)} dt$。

在只有死亡和撤出两个损因的双损失环境中进行矩估计时，以进入群体观察的全体人员为对象，D_x 表示群体中（x,x+1）时段死亡人数的随机变量（杨文中对将记号 D_x 解释为第 x 人在区间（ x,x+1）死亡的随机变量是不对的）。对于第 i 人，假设由他的进入日期和退出日期产生有序对（x+r_i ,x+s_i）。在双损失环境中观察到的死亡的概率是已知年龄 x+r_i 时活着，在年龄 x+s_i 以前死亡的条件概率，即 ${}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(d)}$，这也是来自容量为 1 的样本的期望死亡数，因为死亡数为 1（概率为 ${}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(d)}$），或 0（概率为 ${}_{s_i-r_i}p_{x+r_i}^{(\tau)} + {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(w)}$）。如果 n 是所观察群体的总人数，则总的期望死亡数为 $\sum_{i=1}^{n} {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(d)}$，令其等于实际观察到的死亡数，就得到矩方程 $E[D_x] = \sum_{i=1}^{n} {}_{s_i-r_i}q_{x+r_i}^{(d)} = d_x$，同理也可以写出撤出的矩方程。在互斥的条件下，矩关系式是恒成立的。

这里如果一定要说独立是矩关系成立的条件，那也只能说是作为观察对象的群体的每个个体都是独立同分布的，是将 D_x 分解成了若干个随机变量之和，因此可以将个体的概率相加得到总体的概率。

至于使得矩估计简化，那也是得益于互斥性的假设。是在 ${}_sq_x^{(d)} = \int_0^s {}_tp_x^{(\tau)} u_{x+t}^{(d)} dt$ 式中可以运用 ${}_tp_x^{(\tau)} = {}_tp_x^{\prime(j_1)}\,{}_tp_x^{\prime(j_2)}$ 式，从而在估计上可以有一系列的简化。

以上是我们个人对单损失和多重损失环境下一些精算理论的看法，错误与

不当之处敬请各位同行不吝赐教。

参考文献：

[1] 张涤新.保险精算中单损失和双损失环境的一些重要理论辨析[J].数量经济技术经济研究,2002,9: 76-79.

[2] 杨智元.王艺明.陈浪南等.保险精算中单损失和双损失环境的一些重要理论再辨析.[J]数量经济技术经济研究,2004,4:100-103.

[3]D.London. 陈子毅.生存模型[M].上海：上海科学技术出版社，1996.

[4]Bowers,et al. 余跃年等.精算数学[M].上海：上海科学技术出版社，1996.

a Discussion on an Actuarial Theory about the Doublede Decrement Environment

Zheng zhenlong Li Ming

Abstract: In the field of actuary, the Double Decrement Environment theory is widely applied to analyze and control the risk of life insurance. It's also the base of insurance pricing. In this paper, the Double Decrement Environment theory was carefully studied. A new explanation to the condition of "independence" for ${}_tp_x^{(\tau)}$ **equaling to the product of** ${}_tp_x^{'(d)}$ **and** ${}_tp_x^{'(w)}$ was given. Based on the theory of probability. Some viewpoints different from other scholars were put forward as well.

Key words: survival model, the double decrement environment, force of mortality, and the moment estimation