§3 逐次线性插值法

例：对已给 sin0.32=0.314567,sin0.34=0.333487,sin0.36=0.352274,用线性插值及抛物线插值计算 sin0.3367 的值并估计截断误差。

解：①取 sin0.32=0.314567,sin0.34=0.333487，用线性插值计算：

$$\sin 0.3367 \approx L_1(0.3367) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(0.3367 - x_0)$$

$$= 0.314567 + \frac{0.01892}{0.02}(0.0167) = 0.330365$$

其截断误差为：

$$\left|R_1(0.3367)\right| = \left|\sin 0.3367 - L_1(0.3367)\right|$$

$$\leq \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \left|f''(x)\right| \left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}(0.3335)(0.0167)(0.0033) = 0.92 \times 10^{-5}$$

②取 sin0.34=0.333487,sin0.36=0.352274,用线性插值计算：

$$\sin 0.3367 \approx \tilde{L}_1(0.3367) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(0.3367 - x_1)$$

$$= 0.333487 + \frac{0.018787}{0.02}(-0.0033) = 0.330387$$

其截断误差为：

$$\left|\tilde{R}_1(0.3367)\right| = \left|\sin 0.3367 - \tilde{L}_1(0.3367)\right|$$

$$\leq \max_{x_0 \leq x \leq x_2} \left|f''(x)\right| \left|\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2}(0.3523)(0.0033)(0.0233) = 1.36 \times 10^{-5}$$

③取 sin0.32=0.314567,sin0.34=0.333487,sin0.36=0.352274,
用抛物线插值计算：

$$\sin 0.3367 \approx L_2(0.3367) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= 0.330374$$

其截断误差为：

$$\left|R_2(0.3367)\right| = \left|\sin 0.3367 - L_2(0.3367)\right|$$

$$\leq \max_{x_0 \leq x \leq x_2} \left|f'''(x)\right| \left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6}\right|$$

$$\leq \frac{1}{6}(0.828)(0.0167)(0.033)(0.0233)$$

$$< 0.178\times 10^{-6}$$

用拉格朗日插值多项式 $L_n(x)$ 计算函数近似值，如精度不满足要求需增加插值节点时，原来算出的数据均不能利用，必须重新计算。为克服这缺点，通常可用逐次线性插值方法求得高次插值。

如上例中 $L_2(0.3367)$ 是三节点抛物线插值计算的，它也可由 $L_1(0.3367)$ 和 $\widetilde{L}_1(0.3367)$ 按类似线性插值的方法计算，即

$$\begin{aligned} L_2(0.3367) &= L_1(0.3367)+\frac{\widetilde{L}_1(0.3367)-L_1(0.3367)}{0.36-0.32} \\ &\quad \cdot(0.3367-0.32) \\ &= 0.330365+\frac{0.000022}{0.04}(0.0167)=0.330374 \end{aligned}$$

现令 $I_{i_1\cdots i_n}(x)$ 表示函数 $f(x)$ 关于节点 $x_{i_1,\dots},x_{i_n}$ 的 $(n-1)$ 次插值多项式，$I_{i_k}(x)$ 是零次多项式，记 $I_{i_k}(x)=f(x_{i_k}), i_1,\cdots,i_n$ 均为非负整数。一般情况，两个 k 次插值多项式可通过线性插值得到 $(k+1)$ 次插值多项式：

$$\begin{aligned} I_{0,1,\cdots,k,l}(x) &= I_{0,\cdots,k}(x) \\ &\quad +\frac{I_{0,\cdots,k-1,l}(x)-I_{0,\cdots,k}(x)}{x_l-x_k}(x-x_k). \end{aligned} \tag{3.1}$$

这是关于节点 $x_0,\cdots,x_k,x_l$ 的插值多项式。

下面要说明 $I_{0,1,\cdots,k,l}(x)$ 满足插值条件：

首先：$I_{0,1,\cdots,k,l}(x)$ 为 $k+1$ 次插值多项式。

其次：对 $i=0,1,\cdots,k-1$，有

$$I_{0,1,\cdots,k,l}(x_i)=I_{0,\cdots,k}(x_i)=I_{0,\cdots,k-1,l}=f(x_i),$$

当 $x=x_k$ 时，有

$$I_{0,1,\cdots,k,l}(x_k)=I_{0,\cdots,k}(x_k)=f(x_k),$$

当 $x=x_l$ 有

$$\begin{aligned} I_{0,1,\cdots,k,l}(x_l) &= I_{0,\cdots,k}(x_l) \\ &\quad +\frac{f(x_l)-I_{0,\cdots,k}(x_l)}{x_l-x_k}(x_l-x_k)=f(x_l). \end{aligned}$$

这就证明了（3.1）的插值多项式满足插值条件，我们称（3.1）式为埃特金（Aitken）逐次线性插值公式。当 $k=0$ 为线性插值，$k=1$ 时插值节点为 x_0,x_1,x_l 插值多项式为

$$I_{0,1,l}(x)=I_{0,1}(x)+\frac{I_{0,l}(x)-I_{0,1}(x)}{x_l-x_1}(x-x_1).$$

计算时可由$k=0$到$k=n-1$逐次求得所需的插值多项式，计算过程见表 2-1。

表 2-1

x_0	$f(x_0)=I_0$		$x-x_0$
x_1	$f(x_1)=I_1$	$I_{0,1}$	$x-x_1$
x_2	$f(x_2)=I_2$	$I_{0,2}$ $I_{0,1,2}$	$x-x_2$
x_3	$f(x_3)=I_3$	$I_{0,3}$ $I_{0,1,3}$ $I_{0,1,2,3}$	$x-x_3$
x_4	$f(x_4)=I_4$	$I_{0,4}$ $I_{0,1,4}$ $I_{0,1,2,3,4}$	$x-x_4$

公式（3.1）也可改为以下计算公式

$$I_{0,1,\cdots,k+1}(x)=I_{0,\cdots,k}(x)+\frac{I_{1,\cdots,k+1}(x)-I_{0,\cdots,k}(x)}{x_{k+1}-x_0}(x-x_0)$$

并称它为列维尔（Neville）算法，其计算过程见表 2-2。

表 2-2

x_0	$f(x_0)=I_0$		$x-x_0$
x_1	$f(x_1)=I_1$	$I_{0,1}$	$x-x_1$
x_2	$f(x_2)=I_2$	$I_{1,2}$ $I_{0,1,2}$	$x-x_2$
x_3	$f(x_3)=I_3$	$I_{2,3}$ $I_{1,2,3}$ $I_{0,1,2,3}$	$x-x_3$
x_4	$f(x_4)=I_4$	$I_{3,4}$ $I_{2,3,4}$ $I_{1,2,3,4}$ $I_{0,1,2,3,4}$	$x-x_4$

从表面上看到每增加一个节点就计算一行，斜线上是 1 次到 4 次插值多项式的值。如精度不满足要求，再增加一个节点，前面计算完全有效。这个算法适用于计算机上计算，且具有自动选节点并逐步比较精度的特点，程序也较简单。

例:已知$f(x)=\mathrm{sh}\,x$的值，用埃特金插值求（0.23）的近似值。

x_i	$f(x_i)$				$x-x_0$
0.00	0.00000				0.23
0.20	0.20134	0.231541			0.03
0.30	0.30452	0.233465	0.232118		-0.07
0.50	0.52110	0.239706	0.232358	<u>0.232034</u>	-0.27
0.60	0.63665	0.244049	0.232479	0.232034	-0.37

表中右端是各次插值的计算结果，由于三次插值的两个结果相同，因而不需要再计算四次插值，故求得 $f(0.23)=0.232034$ 。