关于 B-样条插值及紧支撑样条小波插值的一个注记

徐应祥
西北师范大学数学与信息科学学院，甘肃兰州（730070）
E-mail：xuyx@nwnu.edu.cn

摘 要：本文对 B-样条函数插值与紧支撑样条小波函数插值中如何选择基函数做了一些探讨,并指出了选择基函数时应注意的一些问题.

关键词：B-样条 紧支撑样条小波 插值 基函数
中图分类号：O24.82

1. 引言

应用 B-样条函数[1][2]作为基函数构造的插值函数有其较多的优点,如系数矩阵有较好稀疏性,插值函数本身甚至其若干阶导数都能收敛到被插值函数及其相应的若干阶导数,插值函数比较稳定等.正是由于 B-样条插值函数有这许多良好的性质,因此被广泛应用于生产生活中的诸多领域,并且得到了较好的效果.

众所周知,在各类插值函数的构造中基函数的选取是一个很关键的问题,基函数的选取会直接影响到插值函数计算量的大小,插值函数是否是稳定的以及插值函数误差如何估计等.所以在构造插值函数时首先就考虑如何选取基函数,基函数的选取会导致插值函数构造的成败.

本文主要讨论在 B-样条插值函数构造中基函数的选取中应注意的问题,以供在学习和应用 B-样条插值函数时参考.由于 B-样条函数是一大类函数,可以构造很多不同的插值函数,故本文仅以均匀分划下的第一类三次 B-样条插值[1]为例进行讨论和说明.最后在对 B-样条插值讨论的基础上,

也简单说明了应用与 B-样条对应的紧支撑样条小波函数构造插值函数时[3],基函数选取中应注意的问题.

2. B-样条插值中基函数的选择

在文献[1]中用$\Omega_k(x)$表示 B-样条函数,这样的 B-样条是 k 次多项式,具有直到 k-1 阶的连续导数,有明确的解析表达式,且$Supp\Omega_k=[-\frac{k+1}{2},\frac{k+1}{2}]$.当 k=3 时，$\Omega_3(x)$是三次 B-样条函数.以$\Omega_3(x)$为基函数可以构造满足不同插值条件的插值函数.第一类均匀分划下的三次 B-样条插值问题为[1]:

对任意给定$[a,b]$的剖分：$x_{-1}<x_0=a<x_1<\cdots<x_{N-1}<x_N=b<x_{N+1}$，其中$x_{-1}$及$x_{N+1}$为延拓节点，且$x_i=a+ih,\ h=\frac{b-a}{N},\ i=-1,0,1,\cdots,N+1$. 以$\{\Omega_3(\frac{x-x_i}{h})\}_{i=-1}^{N+1}$这一组样条函数为基函数,考虑用这些基函数的线性组合构造的插值函数

$$S_3(x)=\sum_{j=-1}^{N+1}c_j\Omega_3\left(\frac{x-x_j}{h}\right),\tag{1}$$

使满足$N+3$个插值条件：

$$\begin{cases}S_3(x_i)=f_i; & i=0,1,2,\cdots,N,\\ S_3'(x_i)=f_i'; & i=0,N.\end{cases}\tag{2}$$

其中$f_i=f(x_i), f_i'=f'(x_i)$为被插函数$f(x)$在节点处的函数值和导数值,均为已知.由参

考文献[1]知此插值问题(2)的解是存在唯一的,且具有许多良好的性质.

在参考文献[2]中又以与文献[1]稍不同的方式定义了k次B-样条,表为$N_{k+1}(x)$.很容易知道$N_{k+1}(x)$经平移与$\Omega_k(x)$重合,它们的关系为$\Omega_k(x)=N_{k+1}(x+\frac{k+1}{2})$,因此$N_{k+1}(x)$和$\Omega_k(x)$实质上可以看成是一样的.这样如果在(1)中如果直接用$N_4(x)$代替$\Omega_3(x)$而将插值函数形式改写为

$$S_3(x)=\sum_{j=-1}^{N+1}c_jN_4\left(\frac{x-x_j}{h}\right), \tag{3}$$

使其仍满足(2)中插值条件,则由$SuppN_4=[0,4]$及在节点x_0处的两个插条件可得

$$S_3'(x_0)=\sum_{j=-1}^{N+1}\frac{c_j}{h}N_4'\left(\frac{x_0-x_j}{h}\right)=\sum_{j=-1}^{N+1}\frac{c_j}{h}N_4'(-j)=-\frac{1}{2h}c_{-1}=f_0',$$

$$S_3(x_0)=\sum_{j=-1}^{N+1}c_jN_4\left(\frac{x_0-x_j}{h}\right)=\sum_{j=-1}^{N+1}c_jN_4(-j)=\frac{1}{6}c_{-1}=f_0.$$

于是由此两式可知$c_{-1}=-2hf_0'$且$c_{-1}=6f_0$,这显然对一般的被函数是矛盾的,这也说明若直接以(3)式构造插值函数会导致矛盾,从而使满足(2)中插值条件的插值函数不存在.

在(1)与(3)中基函数都用的是 B-样条函数,但为什么形如(3)的确不存在呢?这就说明在构造 B-样条插值函数,基函数的选取是要求的.下面讨论(1)与(3)中的基函数.

在(1)中选取的基函数为一组 B-样条$\{\Omega_3(\frac{x-x_i}{h})\}_{i=-1}^{N+1}$,记$\varphi_i(x)=\Omega_3(\frac{x-x_i}{h})$,则由 B-样条函数的性质有$Supp\Omega_3=[-2,2]$,于是经简单的讨论可知$Supp\varphi_j=[x_j-2h,x_j+2h]$.即有

$$Supp\varphi_{-1}=[x_{-1}-2h,x_{-1}+2h]=[x_0-3h,x_0+3h]=[a-3h,a+h],$$

$$Supp\varphi_0=[a-2h,a+2h],\cdots,Supp\varphi_N=[b-2h,b+2h],Supp\varphi_{N+1}=[b-h,b+3h],$$

这说明在(1)中选取的基函数都与$[a,b]$的交不为空.

在(3)中选取的基函数为一组 B-样条$\{N_4(\frac{x-x_i}{h})\}_{i=-1}^{N+1}$,记$\phi_i(x)=N_4(\frac{x-x_i}{h})$,则由 B-样条函数的性质有$SuppN_4=[0,4]$,于是经简单的讨论可知$Supp\phi_j=[x_j,x_j+4h]$.即有:

$$Supp\varphi_{-1}=[x_{-1},x_{-1}+4h]=[x_0-h,x_0+3h]=[a-h,a+3h],$$

$$Supp\varphi_0=[a,a+4h],\cdots,Supp\varphi_N=[b,b+4h],Supp\varphi_{N+1}=[b+h,b+4h],$$

这说明在(3)中选取的基函数除$N_4(\frac{x-x_N}{h})$和$N_4(\frac{x-x_{N+1}}{h})$外都与$[a,b]$的交不为空.而基函数$N_4(\frac{x-x_N}{h})$与$[a,b]$仅一个交点$x_N=b$. $N_4(\frac{x-x_{N+1}}{h})$与$[a,b]$交为空.因此由基函数的性质可知$\forall x\in[a,b]$, $N_4(\frac{x-x_N}{h})=N_4(\frac{x-x_{N+1}}{h})$ =0,即在(3)中选取的基函数$N_4(\frac{x-x_N}{h})$与$N_4(\frac{x-x_{N+1}}{h})$在$[a,b]$上恒为零,这使得(3)中的插值系数c_N和c_{N+1}对应的项为零,也就是说事实上(3)在$[a,b]$上为

$$S_3(x)=\sum_{j=-1}^{N-1}c_jN_4\left(\frac{x-x_j}{h}\right),$$

即实际上只有N+1个插值系数$\{c_j\}_{j=-1}^{N-1}$,而(2)中却有N+3个插值条件,显然由N+3个插值条件是不能惟一确定N+1个插值系数的,所以满足(2)中条件的(3)中的插值函数不存在.

由此例说明在应用 B-样条插值函数时,一定要注意基函数的选取,否则可能会导致插值函数不存在.

3. 紧支撑样条小波插值中基函数的选择

文献[3]中构造出了最小支集样条小波 $\psi_m(x)$,该小波是以 B-样条函数 $N_m(x)$ 作为尺度函数构造出来的,具有很多良好的性质.紧支撑样条小波函数为

$$\psi_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{j=0}^{2m-2}(-1)^j N_{2m}(j+1)N_{2m}^{(m)}(2x-j)\text{，或 }\psi_m(x)=\sum_{n=0}^{3m-2}q_n N_m(2x-n),$$

其中 $q_n=\frac{(-1)^n}{2^{m-1}}\left[\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}N_{2m}(n-l+1)\right]$.

由于 $N_m(x)$ 是 m-1 次 B-样条函数,故 $\psi_m(x)$ 是 m-1 次分段多项式,分段区间是 $N_m(x)$ 的一半. $\psi_m(x)$ 具有紧支集 $Supp\,\psi_m=[0,\,2m-1]$.由于 $\psi_m(x)$ 是具有紧支集的分段多项式,故可考虑以基作为基函数构造插值函数.

在文献[4]中考虑以三次紧支撑样条小波 $\psi_4(x)$ 为基函数构造插值函数.

对任意给定 $[a,b]$ 的剖分： $x_{-\frac{1}{2}}<x_0=a<x_{\frac{1}{2}}<\cdots<x_{N-\frac{1}{2}}<x_{2N}=b<x_{N+\frac{1}{2}}$,其中 $x_{-\frac{1}{2}}$ 及 $x_{N+\frac{1}{2}}$ 为延拓节点，且 $x_{\frac{i}{2}}=a+\frac{i}{2}h,\ \ h=\frac{b-a}{N},\ i=-1,0,1,\cdots,2N+1$. 如果直接用 $\psi_4(x)$ 对应的小波基构造的插值函数

$$S_3(x)=\sum_{j=-1}^{2N+1}c_j\psi_4\left(\frac{x-x_{i/2}}{h}\right),\tag{4}$$

使满足 $2N+3$ 个插值条件：

$$\begin{cases}S_3(x_{\frac{i}{2}})=f_{\frac{i}{2}}; & i=0,1,2,\cdots,2N,\\ S_3'(x_{\frac{i}{2}})=f_{\frac{i}{2}}'; & i=0,2N.\end{cases}\tag{5}$$

其中 $f_{\frac{i}{2}}=f(x_{\frac{i}{2}}),\ f_{\frac{i}{2}}'=f'(x_{\frac{i}{2}})$ 为被插函数 $f(x)$ 在节点处的函数值和导数值,均为已知.

但由于 $Supp\,\psi_4=[0,\,7]$,故与第 2 部分中相同的方法分析可知 $\psi_4\left(\frac{x-x_N}{h}\right)$ 与 $[a,b]$ 只有一个交点，$\psi_4\left(\frac{x-x_{(2N+1)/2}}{h}\right)$ 与 $[a,b]$ 交为空,也即 $\psi_4\left(\frac{x-x_N}{h}\right)$ 与 $\psi_4\left(\frac{x-x_{(2N+1)/2}}{h}\right)$ 在 $[a,b]$ 上恒为零,所以(4)在 $[a,b]$ 上为

$$S_3(x)=\sum_{j=-1}^{2N-1}c_j\psi_4\left(\frac{x-x_{i/2}}{h}\right),$$

即实际上只有 2*N*+1 个插值系数,而(5)中却有 2*N*+3 个插值条件,显然由 2*N*+3 个插值条件是不能惟一确定 2*N*+1 个插值系数的,所以满足(5)中条件的(4)中的插值函数不存在.

但是若令 $\tilde{\psi}_4(x)=\psi_4(x+\frac{7}{2})$,即将 $\psi_4(x)$ 平移一下,则有 $Supp\,\tilde{\psi}_4=[-\frac{7}{2},\frac{7}{2}]$,这时以 $\tilde{\psi}_4(x)$ 对应的小波基构造的插值函数

$$S_3(x)=\sum_{j=-1}^{2N+1}c_j\tilde{\psi}_4\left(\frac{x-x_{j/2}}{h}\right), \tag{6}$$

由参考文献[4]知此满足(5)中条件的插值问题(6)的解是存在唯一的.这是因为这样选取的基函数的支集与被插函数的插值区间的交不为空,使插值系数刚好有 $2N+3$ 个,由(5)中的 $2N+3$ 个插值条件惟一确定.

此例也说明了用紧支撑样条小作为基构造插值函数时,也要注意基函数的选取,以保证插值函数是存在惟一的.

综上所述,在构造插值函数时,一般选取具有紧支集的基函数.选取基函数时,应使所选基函数的支集与被插值函数的插值区间的交不为空,并且要能够保证插值系数与插值条件的个数相同,使插值条件能惟一确定插系数.在《数值分析》或《计算方法》的教学中,讲授插值函数这部分内容时,我们也应让学生注意基函数选取中的这一关键所在.

参考文献

[1]李岳生,齐东旭.样条函数方法[M].北京:科学出版社,1979.
[2]崔锦泰(美)著,程正兴译.小波分析导论[M].西安:西安交通大学出版社,1995.
[3]C.K.Chui, J.Z.Wang. *On compactly supported spline wavelet and a duality principle*, Trans. Amert. Math. Soc. [J], 330(1992),903-916.
[4]徐应祥.一类三次紧支撑样条小波的插值误差.石河子大学学报(自然科学版)[J],2005, 23(6):790-791.

A Note for B-spline Interpolation and Compactly Suppoted Spline Wavelet Interpolation

Xu Yingxiang
College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou, PRC (730070)

Abstract
How to choose the basic functions in B-spline interpolation and compactly supported spline wavelet interpolation were discussed. Then, some problems for the choice of basic functions have been ginven.

Keywords: B-spline; compactly supported spline wavelet; interpolation; basic function