

# 振动锤的数学模型与全局分叉<sup>1)</sup>

谢建华

(西南交通大学应用力学与工程系, 成都 610031)

**摘要** 用现代动力系统方法, 将振动锤的动力学等价地简化为圆周上的分段连续自映射, 并描述了此映射的性质. 随着激振频率的增加, 系统产生的分叉过程与普通的一维连续映射有本质差异. 在极限状态下, 振动锤的运动是混沌的.

**关键词** 振动锤, 圆周映射, 全局分叉, 混沌

## 引言

利用冲击原理进行工作的惯性振动机已广泛地应用于工程实际, 如冲击式矿车清底器、振动锤、振动钻探机、振动夯土机、冲击振动成型机以及振动落砂机等等 [1].

目前对该类机械的设计是建立在小扰动线性化的基础之上的, 如文 [2] 对振动落砂机的研究; 文 [3] 对气动微震造型机动力学分析; 文 [4] 对蛙式打夯机的探讨等. 但这种方法有很大的局限性: 其一, 它是局部的方法. 在现代动力系统基础上建立起来的冲击动力学理论表明, 对同一组参数, 冲击振动系统可能有多种形式的稳态运动的存在<sup>[5]</sup>. 因此设计工作状态时, 必须根据全局的分析结果; 其二, 冲击振动系统是多参数系统. 随着参数的变化, 系统的稳态运动通过分叉由简单型向复杂型变化, 并可能导致混沌运动<sup>[6,7]</sup>, 而且冲击振动系统的分叉与混沌问题比连续系统更为复杂. 因此, 冲击振动机械的最优化设计必须建立在全局分叉和全局分析的理论基础之上.

本文利用冲击时激振器相位角的后继函数, 建立了描述振动锤动力学的圆周映射. 此映射虽无显式的表达式, 但其性态 (如升降性等) 是可证明的. 由于简化映射具有不连续点, 该映射的分叉过程与通常的一维映射的标准分叉过程不同, 如虽然倍化分叉存在, 但倍化分叉序列不存在. 当激振频率充分大时, 复杂的周期运动出现, 并导致振动锤的混沌运动.

## 1 运动微分方程与圆周映射

图 1 (a) 为电动机与激振器联在一起的振动锤<sup>[1]</sup>. 图 1 (b) 是其力学模型. 两偏心块同频率反向旋转, 当惯性力的垂直分力大于或等于重力时, 锤体被提起, 下落时与被打击物体之间发生非弹性碰撞 (恢复系数  $R = 0$ ). 锤体被提起后的运动微分方程为

$$(m + m_0) \ddot{X} = m_0 \omega^2 r \sin \theta - (m + m_0) g \quad (1)$$

令  $\theta = \omega t$ ,  $x = (1 + m/m_0) / r$ ,  $\mu = (1 + m/m_0) g / (\omega^2 r^2)$ , 则方程 (1) 变换为

$$\ddot{x} = \sin \theta - \mu \quad (2)$$

其中  $x = d^2 x / d^2$ ,  $\mu$  为参数.

1) 国家自然科学基金资助项目.

1994 - 12 - 05 收到第一稿, 1997 - 03 - 16 收到修改稿.

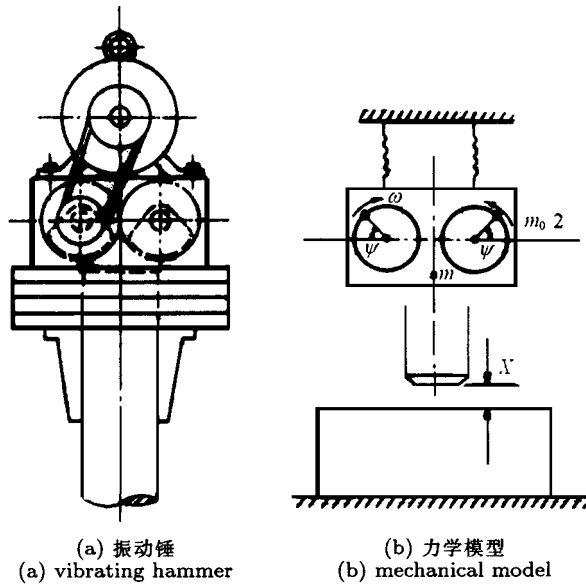


图 1

Fig. 1

式 (2) 满足  $\dot{x} = 0, x = x = 0$  的解为

$$x = x(\psi_0, \mu) = -\sin(\psi + \psi_0) + \sin \psi_0 + \cos \psi_0 - (1/2) \mu^2 \quad (3)$$

其中  $\psi = \psi_0 - \mu t$ . 在  $(\psi_0, \mu)$  平面上取区域 (图 2)

$$D = \{(\psi_0, \mu) \mid \sin \psi_0 - \mu > 0, 0 \leq \psi_0 < \pi, 0 < \mu < 1\}$$

当  $\mu < 1$  时,  $\mu$  为常值的直线与  $D$  的边界有两个交点, 其横坐标分别是  $\psi_\mu, \pi - \psi_\mu$ .  $\psi_\mu$  就是抬起角<sup>[1]</sup>.

当锤体下落并接触被冲击物时

$$x(\psi_0, \mu) = 0 \quad (4)$$

由 (4) 式可定义函数

$$\psi_0 = \psi_0(\mu) \quad (5)$$

函数  $\psi_0(\mu)$  在  $\bar{D}$  上的性态由下引理描述.

引理

- (i)  $\psi_0(\mu)$  是  $D$  上的连续、可微函数;
- (ii) 在  $D$  上, 有

$$\left. \begin{aligned} 1 + \partial \psi_0(\mu) / \partial \mu < 0 \\ \partial \psi_0(\mu) / \partial \mu < 0 \end{aligned} \right\} \psi_0(\mu) \in D \quad (6)$$

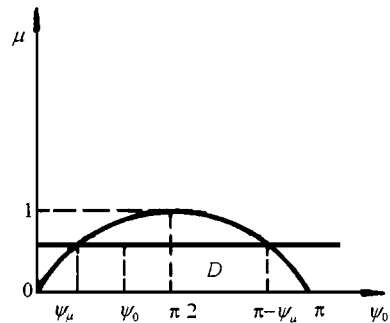


图 2 区域 D

Fig. 2 Area D

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{\partial (\phi, \mu)}{\partial \phi_0} > 0 \\ \left( - \frac{\partial (\phi, \mu)}{\partial \phi_0} \right) < 0 \end{aligned} \right\} \mu \in (0, 1) \quad (7)$$

其中, (7) 式中的  $\frac{\partial (\phi, \mu)}{\partial \phi_0}$  表示在  $\phi_0$  处关于  $\phi_0$  的右偏导数,  $\left( - \frac{\partial (\phi, \mu)}{\partial \phi_0} \right)$  表示左极限.

(iii)  $(\phi, \mu)$  是  $\mu$  的严格单调减函数, 且

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} (\phi, \mu) = +$$

**证明**

(i) 设  $(\phi_0, \mu) \in D$ , 则对  $0 \leq \phi - \phi_0 < \pi - \mu - \phi_0$ , 有  $x^2(\phi, \phi_0, \mu) = \sin(\phi + \phi_0) - \mu > 0$ . 又因为  $x(\phi_0, \phi_0, \mu) = x(0, \phi_0, \mu) = 0$ , 所以  $x(\phi, \phi_0, \mu) > 0$  对  $0 < \phi - \phi_0 \leq \pi - \mu - \phi_0$  成立, 从而  $x(\phi - \mu - \phi_0, \phi_0, \mu) > 0$ . 由 (3) 可知  $\lim_{\phi \rightarrow \phi_0^+} x(\phi, \phi_0, \mu) = -$ , 由中值定理可知, 存在  $\phi - \mu - \phi_0 < \phi < \phi_0 + \pi - \mu$ , 满足方程  $x(\phi, \phi_0, \mu) = 0$ . 取解集合的下确界为  $\bar{\phi}$ . 又  $\frac{\partial x(\bar{\phi}, \phi_0, \mu)}{\partial \phi} = v$ ,  $v$  表示锤下落时冲击物体的速度, 一般不为零. 由隐函数定理, 由 (4) 式可确定连续、可微函数  $(\phi_0, \mu)$ .

(ii) 由隐函数求导法

$$1 + \frac{\partial (\phi_0, \mu)}{\partial \phi_0} = 1 + \left[ - \frac{\frac{\partial x(\phi, \phi_0, \mu)}{\partial \phi_0}}{\frac{\partial x(\phi, \phi_0, \mu)}{\partial \phi}} \right] \Bigg|_{(\phi_0, \mu) \in D} = \frac{\partial (\phi_0, \mu)}{\partial \phi_0} (\sin \phi_0 - \mu) / v(\phi_0, \mu) \quad (8)$$

在 (8) 式中,  $v(\phi_0, \mu)$  表示锤体下落时冲击物体的速度, 其值为负,  $(\phi_0, \mu) > 0$ ,  $\sin \phi_0 - \mu > 0$ , 故式 (6) 的第一式成立. 同理

$$\frac{\partial (\phi_0, \mu)}{\partial \mu} = - \left[ \frac{\frac{\partial x(\phi, \phi_0, \mu)}{\partial \mu}}{\frac{\partial x(\phi, \phi_0, \mu)}{\partial \phi}} \right] \Bigg|_{(\phi_0, \mu) \in D} = \frac{[\phi(\phi_0, \mu)]^2 / 2v(\phi_0, \mu)}{(\phi_0, \mu)}$$

式 (6) 的第二式成立.

特别地在式 (8) 中令  $\phi_0 \rightarrow \mu^+$ , 可知式 (7) 第一式成立. 式 (7) 第二式成立是显然的.

(iii) 设  $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$ , 则  $\mu_1 < \mu_2$ , 由 (6) 式可知  $(\phi_{\mu_1}, \mu_1) > (\phi_{\mu_2}, \mu_1) > (\phi_{\mu_2}, \mu_2)$ , 所以  $(\phi, \mu)$  是  $\mu$  的严格单调减函数.

在方程 (4) 中令  $\phi_0 = \mu$ , 解出

$$\text{使得 } \text{ctg } \mu = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \phi \right) \right] / \left( \phi - \sin \phi \right)$$

当  $\mu \rightarrow 0^+$  时,  $\text{ctg } \mu = +$ , 若 单调地趋一有限的极限, 则由上式导出矛盾. 故  $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} (\mu, \mu) = +$

引理刻画了  $(\theta_0, \mu)$  的性态 (图 3).

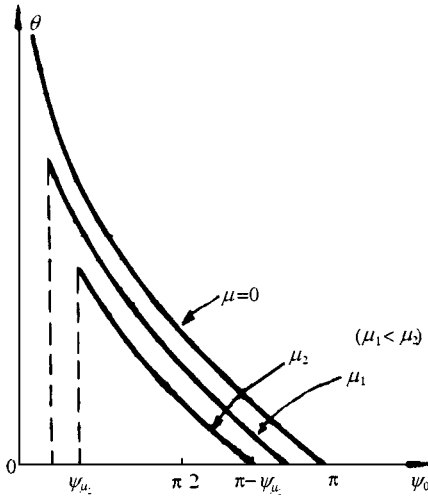


图 3  $(\theta_0, \mu)$  的图像  
Fig. 3 Plot of  $(\theta_0, \mu)$

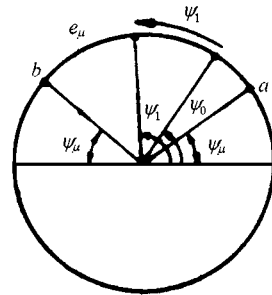


图 4 圆周映射  $\pi_1$   
Fig. 4 Circular mapping  $\pi_1$

当激振器的初相位角  $\theta_0 < \mu$  时, 振动锤与被冲击物体保持接触, 直至  $\theta_0 = \mu$  才能提起. 当  $\theta_0 > \pi - \mu$  时, 也是如此. 因此振动锤的动力学行为由以下定义的圆周上的映射描述

$$\pi_1: S^1 \rightarrow S^1 \tag{9}$$

其中  $S^1$  是单位圆, 而

$$\pi_1 = \pi_1(\theta_0) = \begin{cases} \theta_0 + (\theta_0, \mu) \pmod{2\pi}, & \text{当 } \mu \leq \theta_0 < \pi - \mu \\ \mu, & \text{其它的 } \theta_0 \end{cases} \tag{10}$$

如果记  $e_\mu = [\mu, \pi - \mu)$  为  $S^1$  上按逆时针方向由  $\mu$  至  $\pi - \mu$  的一段半开半闭弧, 则  $\pi_1(S^1/e_\mu) = \{a\}$ , 即  $\pi_1$  将大圆弧  $\widehat{ab}$  (除去  $a$  点) 映成单点  $\{a\}$ .  $\pi_1$  将  $e_\mu$  反向地映成  $\pi_1(e_\mu)$ .  $\mu, \pi - \mu$  是  $\pi_1$  第一类间断点 (图 4, 图 5). 对不同的  $\mu$  值,  $\pi_1(\theta_0)$  的图像可见图 5, 图 7.

## 2 周期运动与稳定性

如果存在  $\theta_0 \in e_\mu$ , 使  $(\theta_0, \mu) = 2n\pi$ , 则有

$$\pi_1(\theta_0) = \theta_0 + (\theta_0, \mu) \pmod{2\pi} = \theta_0 \pmod{2\pi} \tag{11}$$

因此  $\theta_0$  对应于一个周期为  $2n\pi / \omega$  的周期运动. 在该运动中, 锤体在  $n$  个力周期中冲击一次, 冲击后无滞留地被提起. 此运动用周期  $n-1-I$  运动表示.  $n$  表示力周期数,  $1$  表示冲击数,  $I$  表示无滞留过程. 用  $II$  表示有滞留过程的运动类型.

将 (11) 代入 (4), 得

$$\cos \theta_0 = \mu n \tag{12}$$

由 (12) 解出  $\theta_0 = \theta_0^{(n)} = \cos^{-1}(\mu n)$ . 因  $\theta_0^{(n)} \in \pi$ , 故

$$\mu n = \cos \theta_0^{(n)} \leq \cos \mu = \sqrt{1 - \mu^2} \tag{13}$$

周期  $n - 1 - (I)$  运动存在的条件为

$$\mu \leq 1 / \sqrt{1 + (n)^2} \tag{14}$$

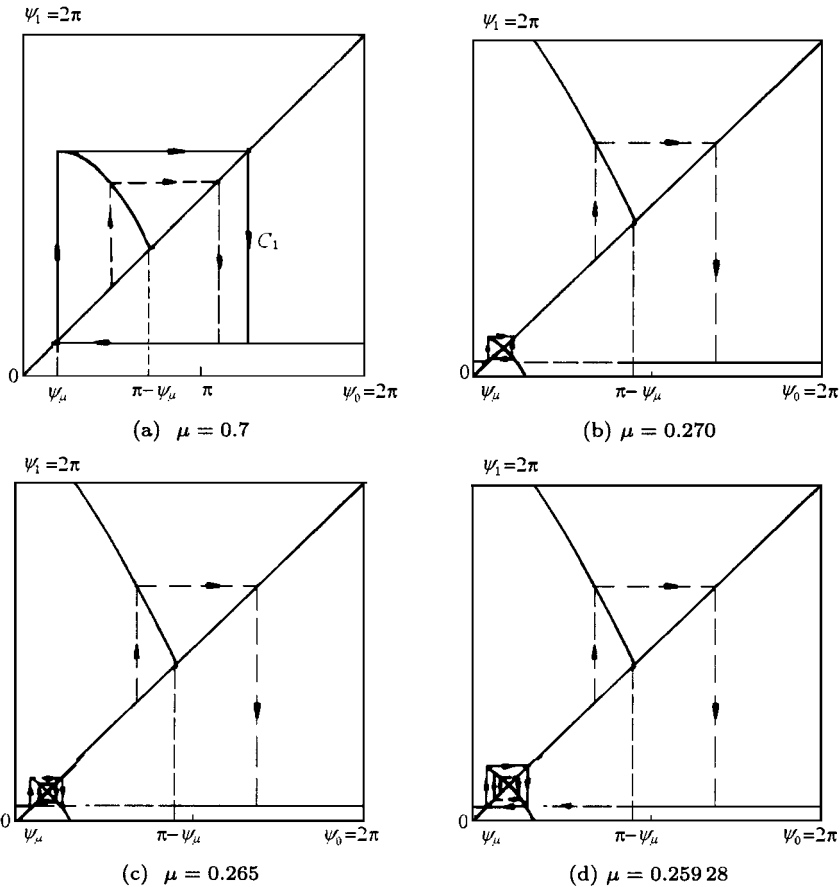


图 5 右继函数

Fig. 5 Subsequent function

现确定周期  $n - 1 - (I)$  运动的稳定性. 设第  $n$  次, 第  $n + 1$  次冲击时, 偏心块的相位角的扰动分别为  $\theta_n$  与  $\theta_{n+1}$ , 则有关系  $\theta_{n+1} = 2\theta_n + \theta_{n+1} - \theta_n$ . 由方程 (4)

$$\begin{aligned}
 H(\theta_n, \theta_{n+1}) = & \sin(2\theta_n + \theta_{n+1}) - \sin(\theta_0 + \theta_n) - \\
 & (2\theta_n + \theta_{n+1} - \theta_n) \cos(\theta_0 + \theta_n) + \\
 & \frac{1}{2} \mu (2\theta_n + \theta_{n+1} - \theta_n)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

函数  $H$  满足

$$\left. \begin{aligned}
 H(0,0) &= 0 \\
 \partial H(0,0) / \partial(\theta_{n+1}) &= 2\theta_n \mu
 \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

由隐函数定理，(15) 式可解出

$$h(n) = h(n) \quad (h(0) = 0) \tag{17}$$

而

$$h'(0) = \left[ -\frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial H}{\partial n+1} \right] \Big|_{(0,0)} = \frac{2n(\sin(\theta_0^{(n)}) - \mu) / (-2n\mu)}{1 - \frac{1}{\mu} \sqrt{1 - (\mu n)^2}} \tag{18}$$

(18) 式有明显的力学意义：分母  $-2n\mu$  表示锤体冲击的速度； $2n$  表示锤体的飞行时间； $F = \sin(\theta_0^{(n)}) - \mu$  表示锤体所受合力（除冲击力外）。由式 (18) 知

$$\left. \begin{aligned} h(0) = 0, & \quad \mu = 1/\sqrt{1+(n)^2} \\ -1 < h(0) < 0, & \quad 1/\sqrt{4+(n)^2} < \mu < 1/\sqrt{1+(n)^2} \\ h(0) = -1 & \quad \mu = 1/\sqrt{4+(n)^2} \\ h(0) < -1, & \quad \mu < 1/\sqrt{4+(n)^2} \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

由式 (19) 知，当周期  $n-1-(I)$  运动出现时， $\theta_0^{(n)} = \mu$  为超稳定的（即后继函数在不动点处有水平的切线）。 $\mu = 1/\sqrt{4+(n)^2}$  对应周期  $n-1-(I)$  运动的倍化分叉，分叉后它变成不稳定的，产生稳定的周期  $n-2-(I)$  运动。

### 3 全局分叉与动态响应

当  $0.303315 = 1/\sqrt{1+(n)^2} < \mu < 1$  时， $\theta_1(e_\mu) \subset S^1/e_\mu$ ，即无论  $\theta_0$  如何，经过一次映射之后，相角  $\theta_1$  落在  $e_\mu$  之外，所以任一运动最终重合于图 5 (a) 中  $C_1$  所示的周期  $1-1-(II)$  运动。系统是全局渐近稳定的。当  $\mu = 0.303315$ ， $\theta_0^{(1)} = \mu$ ，即每次冲击时，偏心块的相角恰好为抬起角  $\mu$ 。当  $0.268514 = 1/\sqrt{4+(n)^2} < \mu < 0.303315$  时，不动点  $\theta_0^{(1)}$  满足  $\mu < \theta_0^{(1)} < -\mu$ ，对应稳定的周期  $1-1-(I)$  运动。其它任一运动趋向此运动（图 5 (b)）。

当  $\mu = 0.268514$  时， $\theta_1(\theta_0^{(1)}) = h(\theta_0^{(1)}) = -1$ ，不动点将变成不稳定的，分叉出稳定的周期 2 轨道  $(\theta_{01}^{(2)}, \theta_{02}^{(2)})$ ，它对应周期  $2-2-(I)$  运动（图 5 (c)）。当  $\mu$  继续减小时， $\theta_{01}^{(2)}$  趋向  $\mu$ ，当  $\mu = 0.25928$  时， $\theta_{01}^{(2)} = \mu$ （图 5 (d)）。当初相角  $\theta_{01}^{(2)} < \theta_0 < \theta_{02}^{(2)}$  时，则运动趋近于周期  $2-2-(I)$  运动，否则最终重合于它。系统是全局渐近稳定的。

当  $\mu$  再减小时，周期  $2-2-(I)$  运动并未向周期  $4-4-(I)$  运动分叉，而是变成了周期  $2-2-(II)$  运动。这是因为  $\theta_1$  无峰或者谷， $\theta_1$  在周期 2 轨道上的两个点的导数均恒为负，故  $\theta_1$  在周期 2 点处的导数大于或等于零（等于零当且仅当  $\theta_{01}^{(2)} = \mu$ ）。因此进一步的倍化分叉不可能发生，倍化序列不存在。它与文 [6] 中研究的冲击振子不同。

当  $\mu$  继续减小时，分叉过程为：周期  $2-2-(II)$   $\rightarrow$  周期  $2-2-(I)$   $\rightarrow$  周期  $4-2-(I)$   $\rightarrow$  周期  $4-2-(II)$   $\rightarrow$  周期  $4-3-(II)$   $\rightarrow$  周期  $3-2-(II)$   $\rightarrow$  周期  $3-1-(II)$   $\rightarrow$  周期  $3-1-(I)$   $\rightarrow$  周期  $6-2-(I)$   $\rightarrow \dots$  (图 6)。

当  $\mu \rightarrow 0^+$  时,  $\Gamma_1$  将下半圆周映成单位圆上的  $a$  点, 将区间  $C_n$  同胚反向地映成  $S^1 - \{a\}$ . 因此在  $C_n$  上有唯一的不动点  $x_n$ , 它对应于周期  $n-1-(I)$  运动, 并且  $x_n$  收敛于  $a$  点. 所有这些运动都是不稳定的 (图 7).

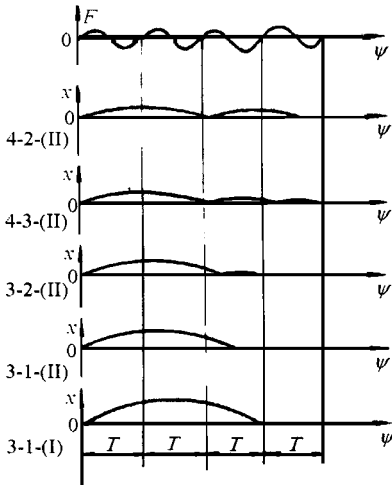


图 6 分叉过程  
Fig.6 Bifurcation process

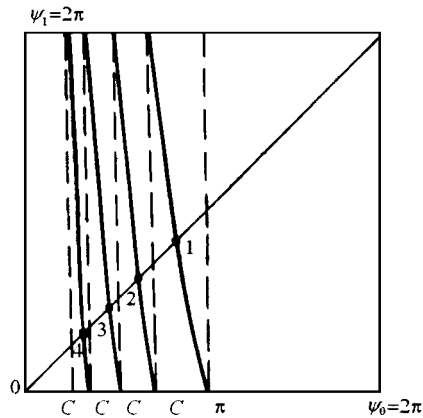


图 7 混沌状态  
Fig.7 Chaos state

### 3 结束语

本文用圆周上映射表示振动锤的动力学, 并证明了该映射的性态. 研究结果表明随着激振频率变化, 振动锤的运动经历复杂的分叉过程, 但与通常的分叉过程有很大的差异. 对高频激励, 振动锤的运动是混沌的.

值得注意的是, 在对 (4) 式应用隐函数定理时, 我们要求  $\partial x / \partial v = 0$ , 这对一般的冲击振动系统不是总能满足的. 具有“零速度冲击”奇异轨道的存在, 造成了冲击振动系统特有的奇异性, 并对系统的全局性态有极大的影响. 但通过对后继函数的数值模拟, 本文模型似不出现此类问题. 但严格的理论分析以及可能对全局分叉过程的影响有待于进一步的研究.

感谢审稿人提出的宝贵意见.

### 参 考 文 献

- 1 闻邦椿, 刘凤翥. 振动机械的理论及应用. 北京: 机械工业出版社, 1982. 254~264
- 2 谢建华, 葛玉梅. 冲击式振动落砂机的动态响应与分叉. 振动工程学报, 1993, 6 (1): 90~95
- 3 刘铁牛, 王伟. 气动机械自激振动的研究与点变换方法. 振动与冲击, 1983, (2): 37~45
- 4 段志善, 闻邦椿. 蛙式打夯机摆动冲击方程的求解及运动稳定性. 见: 全国首届运动稳定性与振动学术会议论文集, 四川峨眉, 1986
- 5 谢建华. 一类冲击振子的余维二分叉和 Hopf 分叉. 应用数学和力学, 1996, 17 (1): 63~73
- 6 Shaw SW, Holmes P. Periodically forced linear oscillator with impact: Chaos and long-period motions. *Physical Review Letters*, 1983, 51 (8): 623~626
- 7 Shaw SW, Rang RH. The transition to chaos in a simple mechanical system. *Int. J. Non-linear mechanics*, 1989, 24 (1): 41~56

## A MATHEMATICAL MODEL FOR IMPACT HAMMERS AND IT ' S GLOBAL BIFURCATIONS

Xie Jianhua

( Dept. of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China )

**Abstract** By the method of modern dynamical systems , we studied the dynamics of impact hammers by maps of circle and investigated the properties of these maps. With the increasing of the frequency of excitation , the bifurcations that take place in this system are different from that in one-dimensional maps. Under extreme conditions , the motions of the impact hammer are chaotic.

**Key words** impact hammer , map of circle , global bifurcation , chaos