一般衍生证券定价方法

陈守东　赵云立　丁　勇

内容提要　本文从状态变量遵循的随机微分方程出发，考虑至少有 n+1 个可交易证券，它们的价格依赖于某些或全部 n 个状态变量所应满足 PDE 及其矩阵表示。

关键词　　衍生证券　无套利方法　PDE

所谓衍生证券定价问题是指已知衍生证券将来可能价格分布，要求确定它现在的价格。对于这种具有不确定性变动的衍生证券，其定价模型方法之一是标准无套利方法，这种方法的一般性理论描述，可概括为以下三个要点。

(1) 变动模型　定义作为评价对象的衍生证券价格必须先确定原始证券的价格变动，而原始证券价格变动的描述，可分为：利用 PDE 描述价格变动模型；利用 PDE 的解，以随机过程予以表现。

(2) PDE 的导出　在任意时点，构造无风险证券组合，在无套利假设下，这个组合的投资收益率与该时点的利率一致，并取得等式。该等式是满足衍生证券价格的 PDE，而衍生证券价格的确定依据初始条件和边界条件；再利用求出的无风险组合的投资比率，导出称为市场风险的参数，这个参数表达式与偏微分方程等同。

(3) PDE 的求解　PDE 的解根据 Feyman-Kac 公式得出，此时的解因为是由随机过程的期望指标是的，而期望值的计算要依据相应的概率分布，所以在求解 PDE 时，还要把握概率分布的计算。

在衍生证券定价的方法讨论中，通常的研究都是针对 n 个状态变量遵循连续时间 $It\hat{o}$ 扩散模型：

$$d\theta_i = m_i\theta_i dt + s_i\theta_i dW_i$$

利用标准无套利方法，给出任何只依赖于状态变量 $\theta_i\left(1 \le i \le n\right)$ 和时间 t 的衍生证券价格 $f(\cdot)$ 满足的偏微分方程(PDE)：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m}\theta_i\frac{\partial f}{\partial\theta_i}\left(m_i - \lambda_i s_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{m}\rho_{ik}s_i s_k\theta_i\theta_k\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i\partial\theta_k} = rf$$

其中 dW_i 是 Wiener 过程，参数 m_i 和 s_i 是 θ_i 的期望增长率和 θ_i 的波动率。 r 瞬间无风险利率，ρ_{ik} 是 dW_i 和 dW_k 之间的相关系数。由 PDE 方程，加上一定的边界条件，就可以获得某个特定的衍生证券。

上面讨论中，状态变量 θ_i 所遵循的 $It\hat{o}$ 过程依赖于 dW_i，本文从状态变量遵循的随机微分方程出发，考虑至少有 n+1 个可交易证券，它们的价格依赖于某些或全部 n 个状态变量所应满足 PDE 及其矩阵表示。

一、模 型

假设状态变量 $\theta^i\left(1 \le i \le n\right)$ 遵循如下的随机微分方程：

$$\begin{cases} d\theta_t^1 = b^1(t,\theta_t)dt + \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{1j}(t,\theta_t)dW_t^j \\ \cdots \\ d\theta_t^{n1} = b^n(t,\theta_t)dt + \sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{nj}(t,\theta_t)dW_t^j \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\theta_t=(\theta_t^{\ 1},\cdots,\theta_t^{\ n})^T,\sigma_{ij}(t,\theta_t)=\mathrm{cov}(W_t^i,W_t^{\ j})$，记：

$b_t=(b^1(t,\theta_t),\cdots,b^n(t,\theta_t))^T=(b_t^1,\cdots,b_t^{\ n})^T$，$W_t=(W^1(t),\cdots,W^n(t))^T$，$\Sigma=(\sigma_{ij}(t,\theta))_{n\times n}$

定义：$dW=(dW_t^{\ 1},\cdots,dW_t^{\ n})^T,d\theta(t)=(d\theta_t^{\ 1},\cdots,d\theta_t^{\ n})^T$，则(1)可表示为：

$d\theta_t=b_t dt+\sum dW_t$

设 $f(\cdot)\in C^2$ 是一个可交易证券的价格，它依赖于状态 θ^j，由 $It\hat{o}$ 定理，f 遵循如下的过程。

$$df=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\theta^i}d\theta^i+1/2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^i\partial\theta^j}d\left\langle d\theta^i,d\theta^j\right\rangle$$

$$=[\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\theta^i}b^i+1/2\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^i\partial\theta^j}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}\sigma_{jk})]dt+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\theta^i}\sigma_{ij}dW_t^{\ j}$$

记：$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,\theta_t)\frac{\partial^2}{\partial\theta^i\partial\theta^j}+\sum_{i=1}^{n}b^i(t,\theta_t)\frac{\partial}{\partial\theta^i}$，其中：

$$a_{ij}(t,\theta_t)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}(t,\theta_t)\sigma_{jk}(t,\theta_t),\quad g_j(t,\theta_t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial\theta^i}\sigma_{ij}$$

则有：

$$df=(\frac{\partial f}{\partial t}+Lf)dt+\sum_{j=1}^{n}g_j dW_t^{\ j} \tag{2}$$

由于n个可交易证券都依赖θ^i，所以我们用 f_j 表示第 j 个可交易证券的价格，则可得到方程组：

$$df_j=(\frac{\partial f_j}{\partial t}+Lf_j)dt+\sum_{i=1}^{n}g_{ij}dW_t^{\ j}=\mu_j dt+\sum_{i=1}^{n}g_{ij}dW^j \tag{3}$$

其中：$\mu_j=\partial f_j/\partial t+Lf_j$，记：

$$\Delta=\begin{bmatrix}\frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial\theta^1} & \cdots & \frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial\theta^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial\theta^1} & \cdots & \frac{1}{f_n}\frac{\partial f_n}{\partial\theta^n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\ln f_1}{\partial\theta^1} & \cdots & \frac{\partial\ln f_1}{\partial\theta^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\ln f_n}{\partial\theta^1} & \cdots & \frac{\partial\ln f_n}{\partial\theta^n}\end{bmatrix},$$

$\overline{\mu}=(\mu_1/f_1,\cdots,\mu_n/f_n)^T$，$d\ln F=(d\ln f_1,\cdots,d\ln f_n)^T$，其中$F=(f_1,\cdots,f_n)^T$由方程组(3)可表示为矩阵形式：$d\ln F=\overline{\mu}dt+\Delta\sum dW_t$

二、PDE 的矩阵表示

在方程组(3)中有n个可交易证券和n个 Wiener 过程，利用这些证券，我们构造一个瞬间的无风险的证券组合π。设χ_i表示投资在 f_i 上的比例，则：

$$\pi=\sum_{i=1}^{n}x_i f_i,\quad\sum_{i=1}^{n}x_i=1$$

它的收益率为：

$$\frac{d\pi}{\pi}=\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{df_i}{f_i}=x^T\overline{\mu}dt+x^T\Delta\sum dW_t$$

定理 1 如果 $|\Delta|\neq 0$，则下述线性方程组有非零解：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & \\ & \Delta\Sigma & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

利用这个解构造的证券组合π可以不含噪音，且组合π的收益率为：

$$\frac{d\pi}{\pi}=\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{\mu}_i \, dt = x^T \overline{\mu} \, dt$$

如果不存在套利机会，该证券组合的收益一定是无风险利率r，所以有：$d\pi/\pi = rdt$，从而有：

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{\mu_i} = r \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik} \Sigma_{kj} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i (\overline{\mu_i} - r) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{j,k=1}^{n} \Delta_{ik} \Sigma_{kj} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

定理 2 如果$|\Delta| \neq 0$，则存在 λ_1，$\cdots$， λ_n 使得：

$$\overline{\mu}_i - r = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik} \Sigma_{kj} \tag{6}$$

证明：记δ_j表示$\Delta\Sigma$的第 j 列，则$n+1$个n维向量组$\sigma_{1,} \cdots, \sigma_n$中$\overline{\mu} - r1$线性相关，再由$|\Delta| \neq 0$，则知$\overline{\mu} - r1$是$\sigma_{1,} \cdots, \sigma_n$的线性组合，且$\overline{\mu} - r1$可用$\sigma_{1,} \cdots, \sigma_n$线性表示，记表示系数为$\lambda_1$， $\cdots$， λ_n，则有(6) 式成立。

记 $\Lambda = (\lambda_{1,} \cdots, \lambda_n)^T$，则(6)式可用矩阵表示为：

$$\overline{\mu} - r1 = \Delta \sum \Lambda \tag{7}$$

将$\overline{\mu}$的定义代入(7)式有：

$$\left(\frac{\mu_1}{f_1} \cdots \frac{\mu_n}{f_n}\right)^T - r1 = \Delta \sum \Lambda$$

记：$\widetilde{F}^{-1} = diag[1/f_1 \cdots 1/f_n]$ ， $\widetilde{F} = diag[f_1 \cdots f_n]$，则上式又可写成：

$$\mu^T \widetilde{F}^{-1} - r1 = \Delta \sum \Lambda \tag{8}$$

写成分量形式有：

$$\mu_l / f_l - r = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{j,k=1}^{n} \Delta_{lk} \Sigma_{kj}) \lambda_j$$

将μ_1代入得并展开有：

$$\frac{1}{f_l}\left[\frac{\partial f_l}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f_l}{\partial \theta^i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 f_l}{\partial \theta^i \partial \theta^j}\right] - r = \sum_{j,k=1}^{n} \Delta_{lk} \Sigma_{kj} \lambda_j$$

即：

$$\frac{1}{f_l}\left[\frac{\partial f_l}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial f_l}{\partial \theta^i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_l}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \sum_{m=1}^{n} \sigma_{im} \sigma_{mj}\right] - r = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1}{f_l} \frac{\partial f_l}{\partial \theta^k} \sigma_{kj} \lambda_j$$

移项整理得：

$$\frac{\partial f_l}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\lambda_j\right)\frac{\partial f_l}{\partial\theta^i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{n}\sigma_{im}\sigma_{jm}\right)\frac{\partial^2 f_l}{\partial\theta^i\partial\theta^j}=rf_l \tag{9}$$

写成矩阵为：

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\left(b-\sum\Lambda\right)\frac{\partial F}{\partial\theta}+\frac{1}{2}I^T\sum\left(\nabla^2 F\right)\sum=rF \tag{10}$$

由此我们有：

定理 3 只依赖于状态变量和时间 t 的 n 个可交易证券满足二阶偏微分方程 PDE (10)，其中：$\nabla^2 F=(\partial^2 f_l/\partial\theta^i\partial\theta^j)$

由方程(9)我们可以看到，对于任意依赖于 n 个标的证券的衍生证券所满足的 PDE 在结构上与 (9.10) 非常相似，只不过是把每一个标的证券 θ_i 的预期增长率由 b_i 换成了 $(b_i-\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\lambda_j)$，这表明将 θ_i 的预期增长率 b_i 换成 $(b_i-\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\lambda_j)$ 而波动率不变且保持原 θ_i，θ_k 的协方差，则衍生证券的价值公式仍可用，且仍为预期盈利的无风险利率的贴现值，即对于方程：

$d\theta=(b-\sum\Lambda)dt+\sum dW$

确定的衍生证券 F 中的任一可交易证券 f_i 的价值 u_i 有表达式：

$u_i=\hat{\mathrm{E}}[\exp(-\int_t^T b_i(s)ds)\Psi_i(\theta_T^i)\,|\,\theta_T^i=\theta]$

且它是(9)式边值条件 $V_i(T,\theta)=\Psi_i(\theta)$ 下的解，$\hat{\mathrm{E}}$ 为将 b_i 的预期增长率换为 $(b_i-\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\lambda_j)$ 的期望值。

2002 年 7 月

(作者单位：陈守东、赵云立：吉林大学数量经济研究中心；丁　勇：长春工业大学)