

多点埋置压电层合梁的程序设计与数值分析¹

王建国, 丁根芳, 覃艳

合肥工业大学土木建筑工程学院, 安徽合肥 (230009)

摘要: 从压电本构方程出发, 借助 Hamilton 原理建立了压电层合结构的有限元方程, 基于此理论, 借助 ANSYS 的二维四结点四边形压电耦合单元, 运用 ANSYS 参数化设计语言 (APDL), 编制了适用任意组压电片埋置于结构内部的力-电多场通用有限元分析程序 (MPFEMP)。在程序验算退化模型正确的基础上, 计算了一个埋置 n 组压电片的复合梁, 提供了埋置 1 组压电片和 2 组压电片的层合梁在不同边界条件下, 压电片的长度(a)和位置(b)变化对梁变形影响的计算结果, 观察结果曲线, 得出的一些结论对压电片埋置于结构内部的设计具有一定的参考意义。同时, 该程序还为复杂不规则压电复合结构的分析提供了基于有限元程序的计算支撑。

关键词: 压电梁, Hamilton 原理, 参数化设计语言, 有限元分析

中图分类号: TU501 TU599 TU311.41

文献标识码: A

1. 前言

近年来压电层合结构以其快响应、高精度、大频宽、高性能等众多特点而被作为传感器与致动器在结构健康检测, 静力形状控制和振动控制, 损伤控制等领域具有潜在的应用前景。如在航天、精密控制及微机电系统^[1,2]和土木工程智能结构^[3]等中广为采用。因此, 对压电层合结构的分析成为近 20 年来国内外学者研究的热点。由于实际压电多层结构的复杂性, 近年来用于压电多层结构分析的有限元数值方法也得到了飞速发展。Crawley^[4]最早开始了这方面的工作。Tzou 和 Tseng^[5]基于 Hamilton 原理和压电材料的本构方程, 提出了含有压电传感器和致动器的薄板壳的有限元分析模型。Benjeddou^[6]提出了一种能用于拉伸致动与剪切致动三层压电耦合结构分析的通用有限元模型。Lammering^[7]基于压电材料的本构方程提出了 Reissner-Mindlin 型板壳的有限元分析模型。Heyliger^[8]基于离散层理论板壳提出了有限元分析模型。Lee 和 Saravanos^[9]基于剪切-离散层理论考虑力电热耦合提出了板壳的有限元分析模型。国内 Tian 与 Shen^[10]、丁皓江^[11]等在压电有限元方面也做了很多工作。Song^[12]基于一阶剪切变形理论, 采用一种新的具有多自由度的四结点四边形有限单元 CTMQE 对压电复合板进行了研究。Wang^[13]基于状态空间法系统研究了多层压电介质空间轴对称与非轴对称问题的解。

本文运用 Hamilton 原理建立了含有压电传感器与致动器的多层耦合结构的有限元方程, 根据此理论, 借助 ANSYS 的二维四结点四边形压电耦合单元, 运用 ANSYS/APDL 语言, 编制了适用任意组压电片埋置于智能结构内部的力-电多场通用有限元分析程序 (MPFEMP)。首先运用此程序验算了三层压电梁, 与文^[16]比较证明了本文方法的可行性与有效性, 在此基础上, 计算了压电片埋置于结构内部的五层复合梁, 算例中提供了 1 组压电片和 2 组压电片在不同边界条件下的计算解, 讨论了压电片长度和位置变化对梁的变形影响, 得出的一些结论, 对智能结构的设计具有一定的参考价值。本文的计算程序还可以作为复杂不规则压电复合结构有限元分析的计算支撑。

2. 线弹性压电体有限元方程

在推导有限元耦合方程前, 我们对压电层合结构作如下假定: 1)、结构各层之间理想黏

¹本课题得到国家自然科学基金 (10572046); 高等学校博士学科点专项科研基金 (20030359005) 和安徽省自然科学基金的资助。

结；2)、遵循线性弹性压电体理论；3)、各个压电片之间无相互作用的电磁场干扰；4)、压电片上下表面完全覆盖电极。线性压电本构方程^[14,15]：

$$\begin{cases} \{\sigma\} = [c]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} \\ \{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [\varepsilon]\{E\} \end{cases}$$

(1)

式中 $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, \{E\}, \{D\}$ 为应力，应变，电场强度，电位移矢量； $[c], [e], [\varepsilon]$ 为弹性，压电和介电系数矩阵。线性压电结构能量泛函为：

$$L = T - H + W$$

(2)

其中 T 是动能， H 是电焓， W 是外力和电荷所做的功。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} d\Omega \\ H &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{E\}^T \{D\}) d\Omega \\ W &= \int_S \{u\}^T \{F\} dS + \int_{\Omega} \{u\}^T \{f\} d\Omega - \int_S \phi Q dS - \int_{\Omega} \phi q d\Omega \end{aligned}$$

(3)

式中 $\{\dot{u}\}$ 为速度矢量， $\rho, \phi, S, \Omega, \{F\}, \{f\}, Q, q$ 分别为质量密度，电势，面积，体积，面力，体力，面电荷密度，体电荷密度。

由哈密尔顿 (Hamilton) 原理可得

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

(4)

在有限元方法中，位移 $\{u\}$ 和电势 ϕ 可用插值函数表示为：

$$\begin{cases} \{u\} = [N_u] \{u_i\} \\ \phi = [N_\phi] \{\phi_i\} \end{cases}$$

(5)

其中 $\{u_i\}, \{\phi_i\}$ 为节点位移和电势值， $[N_u], [N_\phi]$ 为形函数。由应变与位移的关系和电场与电势的关系，利用方程 (4) 可得：

$$\begin{cases} \{\varepsilon\} = [B_u] \{u_i\} \\ \{E\} = -[B_\phi] \{\phi_i\} \end{cases}$$

(6)

式中 $[B_u]$ 是应变矩阵， $[B_\phi] = -\nabla [N_\phi]$ 。将方程 (1) ~ (3), (5), (6) 代入 (4)，由 Hamilton 原理可得：

$$\begin{aligned} [M_{uu}] \{\ddot{u}\} + [K_{uu}] \{u_i\} + [K_{u\phi}] \{\phi_i\} &= \{p_i\} \\ [K_{\phi u}] \{u_i\} + [K_{\phi\phi}] \{\phi_i\} &= \{g_i\} \end{aligned} \tag{7}$$

其中：

$$\begin{aligned}
 [K_{uu}] &= \int_{\Omega} [B_u]^T [c] [B_u] d\Omega & [K_{u\phi}] &= \int_{\Omega} [B_u]^T [e]^T [B_{\phi}] d\Omega \\
 [K_{\phi u}] &= \int_{\Omega} [B_{\phi}]^T [e] [B_u] d\Omega & [K_{\phi\phi}] &= \int_{\Omega} [B_{\phi}]^T [\epsilon] [B_{\phi}] d\Omega \\
 \{p_i\} &= \int_S [N_u]^T \{F\} dS + \int_{\Omega} [N_u]^T \{f\} d\Omega \\
 \{g_i\} &= -\int_S [N_{\phi}]^T Q dS - \int_{\Omega} [N_{\phi}]^T q d\Omega
 \end{aligned}$$

由方程 (7) 的第二式解出 $\{\phi_i\} = [K_{\phi\phi}]^{-1} (\{g_i\} - [K_{\phi u}] \{u_i\})$ 并代入方程 (7) 的第一式可得:

$$[M_{uu}] \{u_i\} + ([K_{uu}] - [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi u}] [K_{\phi u}]) \{u_i\} = \{p_i\} - [K_{\phi\phi}]^{-1} \{g_i\} \quad (8)$$

方程 (8) 是以结点位移表示的线性压电结构的有限元法动力方程。

3. 力-电有限元分析程序 (MPFEMP) 及程序验算

力-电有限元分析程序 (MPFEMP) 主要采用 ANSYS 内置的参数化设计语言 APDL, 利用: 1) *DO,*ENDDO 循环语句; 2) *IF,*ELSE,*ENDIF 等判断语句; 3) *DIM 矩阵定义语句; 实现在压电片上模拟任意数量的电极, 在任意电极上加载任意变化的电压载荷。

为验证力-电有限元分析程序 (MPFEMP) 有效性, 我们先对 zhang^[16]所示中间层全为压电层的叠层梁展开对比验证分析。几何参数、材料常数、载荷和边界条件均同 zhang^[16], 本文计算所得梁端挠度: 1.174 E10⁻⁷m 与 zhang^[16]解析解: 1.19E10⁻⁷m 吻合良好, 误差率为 1.3%, 证明了本文计算方法的有效性。

4. n 组压电片埋置的五层复合梁

图 1 所示的五层压电梁, 沿 Z 轴正向第 1、3 与 5 层为铝, 第 2、4 层为多组压电片与刚性泡沫块混合填充层, 压电材料极化方向平行于 X 轴。分析作如下假定: 1) 电极相对于压电材料和铝层不计质量及刚度; 2) 压电层、电极和铝层的黏结是理想的, 不存在相对位移; 3) 压电材料不存在相互的电磁效应; 4) 材料沿 Z 向变形均匀。梁总长 L 为 100mm, 铝层 h_1, h_3, h_5 等厚均为 8mm, 压电层等厚均为 2mm, 第 i 组压电片的长度 a_i 和位置 b_i 表达式见式 (9), 在每个电片上施加 100v 的同向电压荷载。分析中考虑梁两端固支(C-C)、两端铰结(H-H)、一端固支一端自由(C-F)与一端固支一端铰结(C-H)四种边界条件。有限元分析采用四结点四边形单元 (PLANE13), 五层梁结构划分成 550 个网格, 兼顾了计算效率和计算精度。

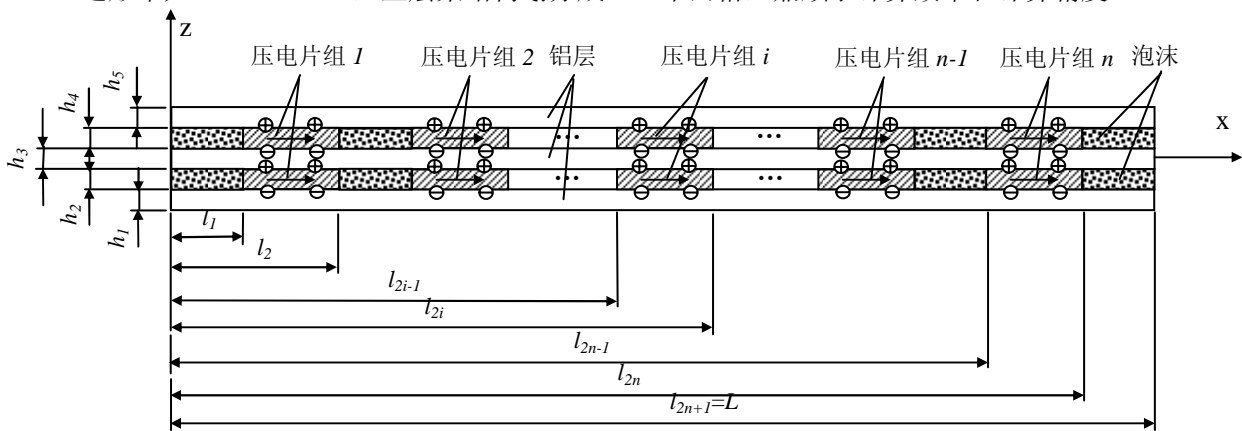


图 1 五层压电耦合梁示意图

Fig.1 Principle figure of five layered piezoelectric beam

$$a_i = l_{2i} - l_{2i-1}$$

$$b_i = \frac{l_{2i} + l_{2i-1}}{2} \quad (9)$$

材料参数：铝 (AL) [7]: $E=70.3\text{Gpa}$, $\nu=0.34$, $\rho=2690\text{kg/m}^3$

刚性泡沫 (FOAM) [7]: $E=35.3\text{Gpa}$, $G=12.76\text{MPa}$, $\nu=0.383$, $\rho=32\text{kg/m}^3$

压电材料 (PZT5H) [7]:

$$e = \begin{bmatrix} 1.503 & 0 & 0 \\ 0 & 1.503 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 \end{bmatrix} \times 10^{-8} \text{Fm}^{-1}$$

$$c = \begin{bmatrix} 12.6 & 7.95 & 8.41 & 0 & 0 & 0 \\ & 12.6 & 8.41 & 0 & 0 & 0 \\ & & 12.6 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2.33 & 0 & 0 \\ sym & & & & 2.3 & 0 \\ & & & & & 2.3 \end{bmatrix} \times 10^{10} \text{Nm}^{-2}$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ -6.5 & -6.5 & 23.3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Cm}^{-2}$$

4.1 埋置 1 组压电片的梁的变形分析

4.1.1 压电片位置 (b1) 变化, 长度(a1)固定

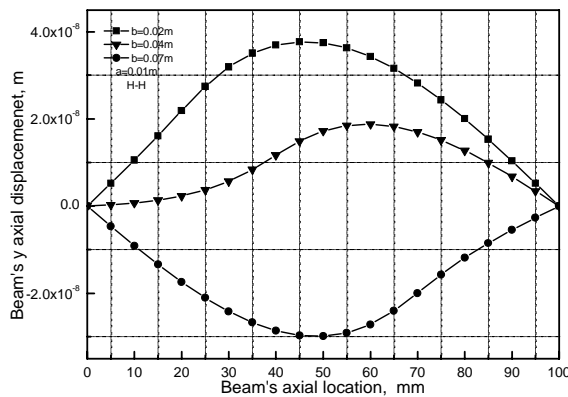


图 2-1 H-H 下压电片不同位置的梁的变形图
Fig.2-1 Piezo's deflection in different location(H-H)

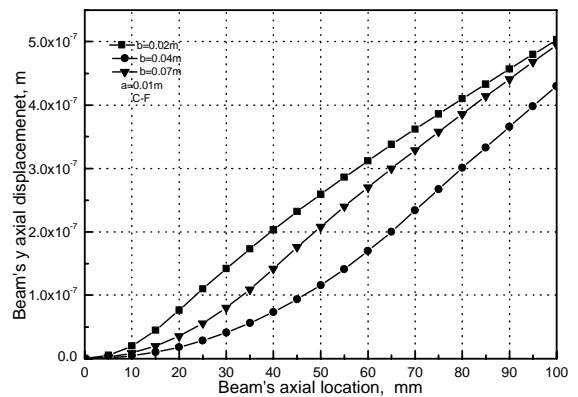


图 2-2 C-F 下压电片不同位置的梁的变形图
Fig.2-2 Piezo's deflection in different location(C-F)

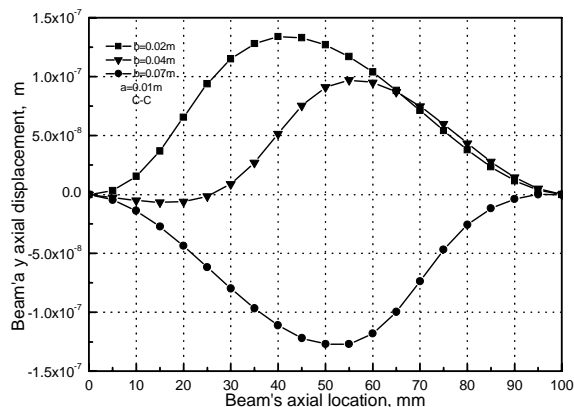


图 2-3 C-C 下压电片不同位置的梁的变形图
Fig.2-3 Piezo's deflection in different location(C-C)

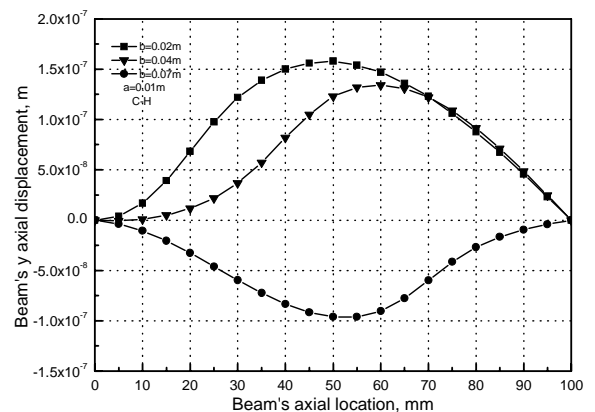


图 2-4 C-H 下压电片不同位置的梁的变形图
Fig.2-4 Piezo's deflection in different location(C-H)

4.1.2 压电片位置 (b1) 固定, 长度(a1)变化

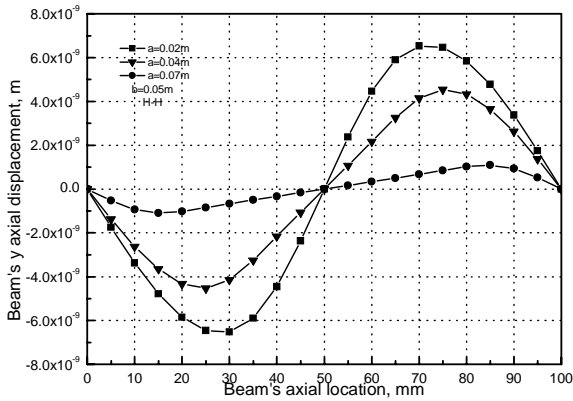


图 3-1 H-H 下压电片不同长度的梁的变形图
Fig.3-1 Deflection versus piezoelectricity length(H-H)

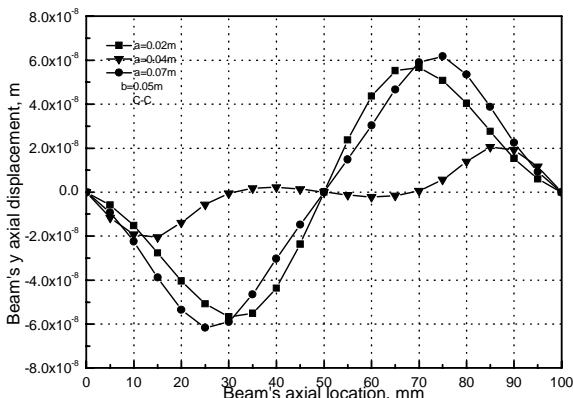


图 3-3 C-C 下压电片不同长度的梁的变形图
Fig.3-3 Deflection versus piezoelectricity length(C-C)

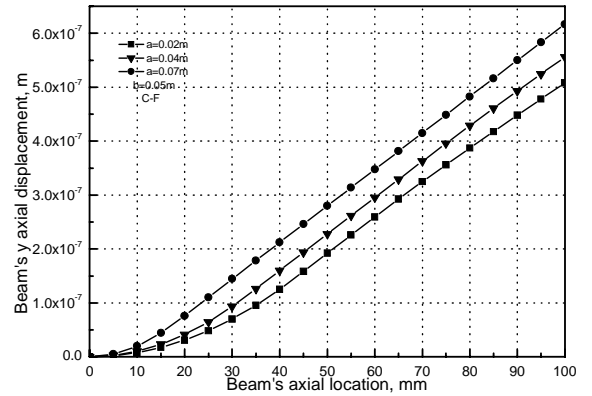


图 3-2 C-F 下压电片不同长度的梁的变形图
Fig.3-2 Deflection versus piezoelectricity length(C-F)

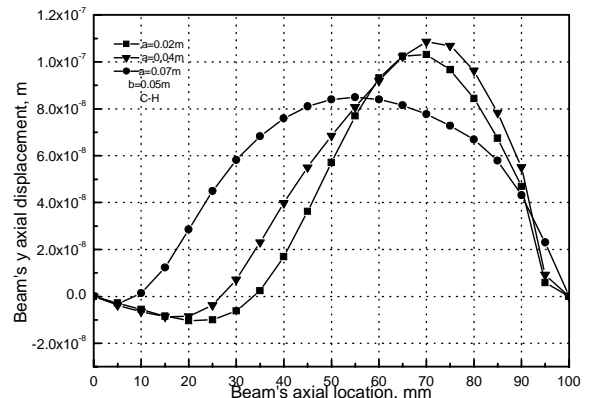


图 3-4 C-H 下压电片不同长度的梁的变形图
Fig.3-4 Deflection versus piezoelectricity length(C-H)

4.2 埋置 2 组压电片的梁的变形分析

4.2.1 压电片位置 (b1 , b2) 变化, 长度(a1 , a2)固定

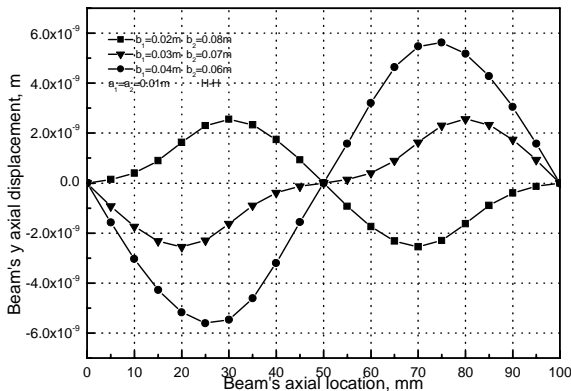


图 4-1 H-H 下在压电片不同长度下的梁的变形图
Fig.4-1 Piezo's deflection in different location(H-H)

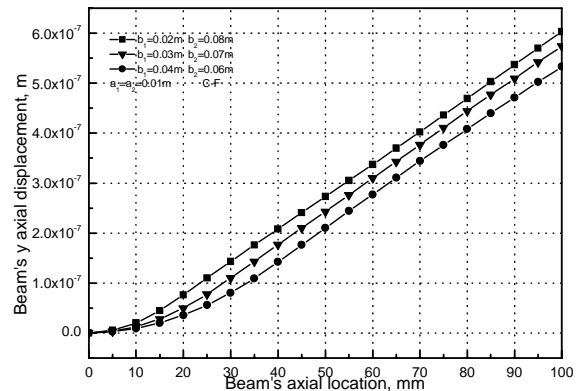


图 4-2 C-F 下在压电片不同长度下的梁的变形图
Fig.4-2 Piezo's deflection in different location(C-F)

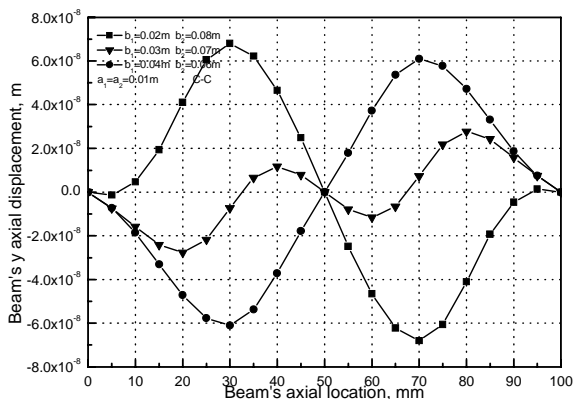


图 4-3 C-C 下在压电片不同位置下的梁的变形图
Fig.4-3 Piezo's deflection in different location(C-C)

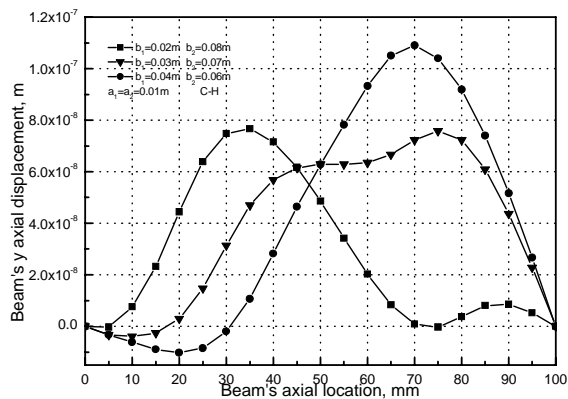


图 4-4 C-H 下在压电片不同长度下的梁的变形图
Fig.4-4 Piezo's deflection in different location(C-H)

4.2.2 两压电片位置 (b1, b2) 固定, 长度(a1, a2)变化

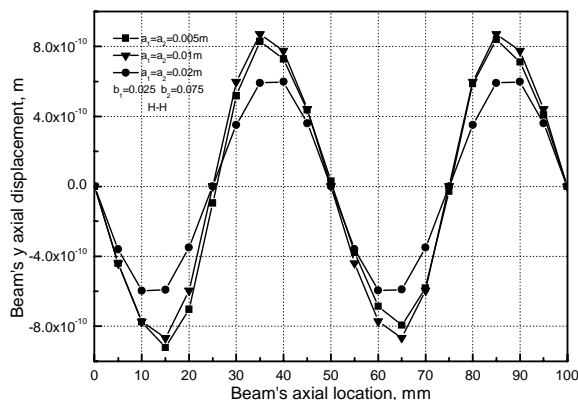


图 5-1 H-H 下在压电片不同长度下的梁的变形图
Fig.5-1 Deflection versus piezoelectricity length(H-H)

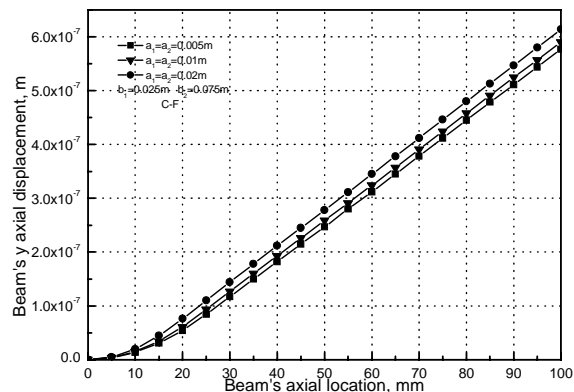


图 5-2 C-F 下在压电片不同长度下的梁的变形图
Fig.5-2 Deflection versus piezoelectricity length(C-F)

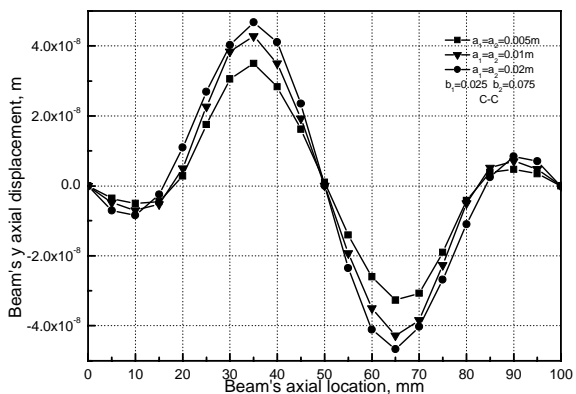


图 5-3 C-C 下在压电片不同长度下的梁的变形图
Fig.5-3 Deflection versus piezoelectricity length(C-C)

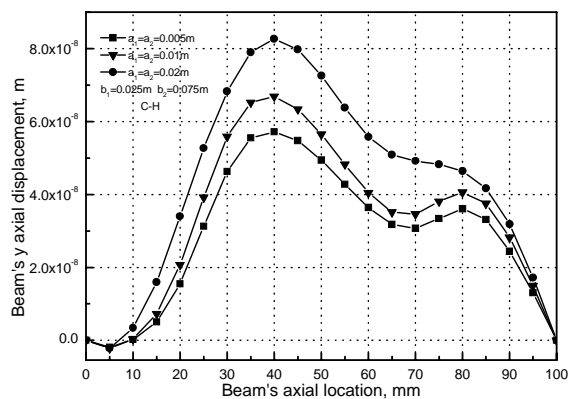


图 5-4 C-H 下在压电片不同长度下的梁的变形图
Fig.5-4 Deflection versus piezoelectricity length(C-H)

5. 自由振动分析

研究结构的自振频率与振型是结构形状控制和主动控制的基础。我们采用 APDL 语言编制层合梁的自由振动分析程序, 压电单元采用二维四结点应力耦合单元, 普通材料采用平面等参结构单元, 计算了: (1)、单压电片对埋置于结构的自由振动, $a=10\text{mm}, b=50\text{mm}$; (2)、2 组压电片对埋置于结构的自由振动, $a_1=a_2=10\text{mm}$ 。材料参数同静力计算部分, 表 1 和表 2 分别给出了闭环前五阶自振频率。

表 1 埋置单压电片对梁的前五阶自振频率(Hz)
Table 1 Beam's first five natural frequencies with embedded one pair of piezoelectricity

	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶
C-F	1792.1	6569.4	14151	19172	20040
C-H	4486.5	14046	15869	27443	36560
H-H	1083.0	9497.5	13428	18623	27190
C-C	6330.7	23649	27087	31438	37348

表 2 埋置 2 组压电片对梁的前五阶自振频率(Hz)
Table 2 Beam's first five natural frequencies with embedded two pairs of piezoelectricity

	1 阶	2 阶	3 阶	4 阶	5 阶
C-F	2068.2	13837	16481	26134	28100
C-H	10493	14776	26072	26919	30154
H-H	1994	13130	20432	22673	28666
C-C	17430	25534	29147	30954	34998

6. 结论

本文根据智能结构有限元方程, 编制了力-电有限元分析程序 (MPFEMP), 并采用该程序对压电片埋置于结构内部的层合梁进行了计算分析。在算例中, 设计了由压电材料与普通材料以及泡沫填充层混合构成的五层复合结构, 分别内置 1 组压电片和 2 组压电片, 在不同边界条件下加载相同电压荷载, 考察压电层位置及长度改变引起对梁变形的影响。本文的计算程序以及通过结果曲线分析得出的以下一些结论, 可以为复杂智能结构的设计提供一定的帮助。

(1)、C-F 边界条件下, 无论配置一对压电片还是两对压电片的悬臂梁, 压电片长度越长, 位置尽量靠近固定端, 梁的轴向位移越大, 最大位移发生在梁的自由端。

(2)、C-H、C-C、H-H 三种情况下, 随着压电片位置的改变和长度的改变, 梁的最大位移均发生非常大的变化, 通过计算结果发现基本无规律可循。压电片长度的改变大部分情况下都对梁的变形影响相对较小。而压电片位置的改变对于梁最大位移的影响较大, 所以, 压电片在结构中的位置和尺寸, 存在着一个最优设计的问题。

(3)、相同长度相同位置的压电片在不同边界条件下产生的位移也各不相同, 因此, 压电层合结构边界条件的设计, 对于最终的结构致动性能, 有明显的影响。

(4)、对比埋置 1 组压电片和埋置 2 组压电片的层合结构, 发现压电片数量的增加, 对梁的最大位移影响不大, 但是对于梁任何一处获得足够理想的致动效果, 影响较大。所以, 对于层合压电结构形状最优控制的问题, 需要配置多个压电片。

(5)、对比表 2 和表 3, 发现梁固支后自振频率明显增大, 同时, 增加压电片的数量后, 结构的自振频率也相应增大, 表 2 和表 3 的结论, 和实际情况完全一致, 可以为智能结构的被动控制和主动控制设计提供参考。

参考文献

- [1] DEMEIS R B. Piezoelectric damping for space structures[J]. Aerospace AM, 1985, 23 (9): 32-33.
- [2] LIAO W H, WANG D H, HUANG S L. Wireless monitoring of cable tension of cable-stayed bridges using PVDF piezoelectric films[J]. J Intel Mat Syst Str, 2001,12 (5): 331-339.
- [3] 李宏男,李军,宋钢兵.采用压电智能材料的土木工程结构控制研究进展[J]. 建筑结构学报, 2005, 26(3):1-8
- [4] CRAWLEY E F, DELUIS J. Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures[J]. AIAA J, 1987, 25(10): 1373-1385.
- [5] TZOU H S, C I. TSENG Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter system:finite element approach[J]. Sound Vibration, 1990,138:17-34.
- [6] BENJEDDOU A, TRINDADE M A, OHAYON R. A unified beam finite element model for extension and shear piezoelectric actuation mechanisms[J]. J Intel Mat Syst Str, 1997, 8 (12): 1012-1025.
- [7] LAMMERING R. The application of a finite shell element for composites containing piezoelectric polymers in vibration control[J]. Computers and Structures, 1991, 41(5), 1101-1109.
- [8] HEYLIGER P, PEI K C, SARAVANOS D A. Layerwise mechanics and finite element model for laminated piezoelectric shells[J], AIAA Journal, 1996, 34(11):2353-2360
- [9] LEE H J,SARAVANOS D A. A mixed multi-field finite element formulation for thermopiezoelectric composite shells[J]. Int. J. Solids and Structures, 2000, 37:4949-4967.
- [10] TIAN X G, SHEN Y P. Finite element analysis of thermoelastic behavior of piezoelectric structures under finite deformation[J]. Acta Mech Solid A Sin, 2002,15 (4): 312-322.
- [11] 丁皓江,池毓蔚,国凤林,侯鹏飞. 压电材料轴对称有限元分析. 计算力学学报[J], 2000, 17(1): 1-7.
- [12] SONG CEN, AI-KAH SOH, YU-QIU LONG, ZHEN-HAN YAO. A new 4-node quadrilateral FE model with variable electrical degree of freedom for the analysis of piezoelectric laminated composite plates. Composite structures,2002,58(4):583~599.
- [13] WANG J G, FANG S S, CHEN L F. The state vector methods for space axisymmetric problems in multilayered piezoelectric media[J]. Int J Solids Structures, 2002, 39: 3959-3970.
- [14] SMITS J G, DALKE S I, COONEY T K. The constituent equations of piezoelectric biphases[J]. Sensors and Actuators A-Phys, 1991,28: 41-61.
- [15] TZOU H S. Piezoelectric shells: distributed sensing and control of continua[M]. Netherlands:Kluwer Academic Publishers; 1993.
- [16] ZHANG X D, SUN C T. Formulation of an adaptive sandwich beam[J]. Smart Mater Struct, 1996, 5 (6): 814-823.

Numerical analysis and program design of multilayered beam with embedded multi-piezoelectric actuators

Wang Jianguo, Ding Genfang, Qin Yan

School of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei , China (230009)

Abstract

The finite element equations are derived by application of Hamilton principle based on the classic electroelastic theory. Based on these equations, mechanical-electric coupled program has been developed by use of ANSYS/APDL language. Based on the analysis of a degraded model, we researched the influence for the beam's deflection caused by the change of the piezoelectricity's length(a) and position(b). One set and two sets of piezoelectricity have been presented. A conclusion has been derived to be advisory in designing piezoelectricity structure. At the same time, this program will be helpful for the analysis of complex and anomalous structure.

Keywords: piezoelectric beam; Hamilton principle; parameteric design language; finite element analysis

作者简介: 王建国(1954), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 土木工程中的关键性力学问题的研究。