



2023 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

招生专业与代码：070101 基础数学、070102 计算数学、070103 概率论与数理统计、070104 应用数学、070105 运筹学与控制论

考试科目名称及代码：810 高等代数（A 卷）

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

科目： 高等代数

共 页，第 页

一、（10 分）计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_0 & x & x & \cdots & x \\ x & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$ ，其中 $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \neq 0$.

二、（15 分） 已知 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是线性方程 $Ax=0$ 的一个基础解系，若 $\gamma_1 = \beta_1 + a\beta_2, \gamma_2 = \beta_2 + a\beta_3, \gamma_3 = \beta_3 + a\beta_4, \gamma_4 = \beta_4 + a\beta_1$ ，讨论 a 满足什么关系时， $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 也是方程 $Ax=0$ 的一个基础解系.

三、（15 分） 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & k & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 k 的值，并讨论 A 能否对角化.

四、（15 分） 设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 10)^T, \alpha_2 = (-2, 1, 5)^T, \alpha_3 = (-1, 1, 4)^T, \beta = (1, b, c)^T$. 当 a, b, c 满足什么条件时：

- (1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且表示唯一.
- (2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.
- (3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但表示不唯一，并求出一般表达式.

五、（20分）设二次型 $f(x, y, z) = \alpha x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 2\beta xz$, ($\beta > 0$), 已知二次型的矩阵 A 特征值之和为 1, 特征值之积为 -12 , 求:

(1) α, β 的值;

(2) 利用正交变换把二次型化为标准型, 并写出所使用的正交变换和对应的正交矩阵.

六、（15分）若 A 是一个 $m \times n$ 的实矩阵且秩为 n , 是否一定会有 $A^T A$ 可逆? 证明你的结论或给出反例.

七、（15分）一个线性变换的最小多项式是否一定可以整除特征多项式? 证明你的结论或给出反例.

八、（20分）以下关于分块矩阵行列式的等式, 在什么条件下是成立的? 证明你的结论.

$$\begin{vmatrix} A & C \\ & B \end{vmatrix} = |A| \times |B|$$

九、（25分）若欧氏空间 V 上的线性变换 A 和其共轭变换可交换, M 为 A 的不变子空间. 试证明: M 的正交补 N 也是 A 的不变子空间.