双贮备系统冷/温/热贮备模型的优化选择研究

金海波 [1] 赵欣越 [1] 桑 雨 [2]

摘 要 对运行设备安装双贮备设备是实现系统高可靠性的有效方法. 在双贮备系统冷/温/热三种贮备模型中, 选择哪种贮备模型对系统性能指标和经济指标均有重要影响, 因此对如何选择双贮备系统的贮备模型从而使系统性能最优或经济效益最大的问题进行研究具有现实意义. 而现有研究成果很少涉及双贮备系统贮备模型的优化选择问题. 为此, 本文创新性地提出一种确定双贮备系统最优贮备模型的选择方法. 分别建立系统冷/温/热贮备模型, 分析每个模型的系统状态及系统半 Markov 核函数, 利用 Markov 更新方程、Laplace 变换以及 Laplace-Stieltjes 变换技术推导系统稳态可用度、稳态平均维修次数、维修人员稳态忙期概率以及冷贮备模型的平均激活时间, 并从经济角度给出系统单位时间内的净收益函数. 最后分别以性能指标和经济指标作为研究目标, 通过模型对比分析给出不同条件下的系统贮备模型的优化选择算法, 并对每个研究目标下的优化选择算法进行实例计算. 计算结果表明以不同性能指标和不同费用作为参考得出的最优贮备模型不尽相同, 从而验证了所提方法能够有效地确定不同衡量标准下的系统最优贮备模型.

关键词 双贮备系统, Markov 更新方程, Laplace-Stieltjes 变换, 模型对比分析

引用格式 金海波, 赵欣越, 桑雨. 双贮备系统冷/温/热贮备模型的优化选择研究. 自动化学报, 2023, **49**(9): 2003−2018

DOI 10.16383/j.aas.c200533

Research on Optimal Selection for Cold/Warm/Hot-standby Patterns of Dual-standby Systems

JIN Hai-Bo[1] ZHAO Xin-Yue[1] SANG Yu[2]

Abstract It is an effective way to realize the system high reliability by installing dual-standby device. Among the three standby models of cold, warm and hot, which standby model to select has a significant impact on the system performance and economic indicators. However, existing research works rarely involved the optimal selection of standby models. Thus, this study innovatively presents an approach to determine the optimal standby mode for dual-standby systems. The models of cold, warm and hot standby are constructed respectively, and system states and corresponding state transition probabilities of each model are analyzed. Subsequently, the availability, average number of maintenance, probability of the repairman busying and average activation time of the cold standby system in steady state are deduced using the Markov renewal equation, Laplace transform and Laplace-Stieltjes transform technologies. Furthermore, the function with respect to net revenue per unit time of the system is given from the viewpoint of economic principles. Finally, the optimal selection algorithm of the system standby model under different conditions is given in terms of performance and economic indicators through comparative analysis among models, and numerical examples of optimal selection algorithm in each objective are given based on a practical application. The numerical results demonstrate that the obtained optimal standby pattern is not always the same when taking different performance indicators and different costs as references, which validates that the presented approach can effectively determine the optimal system standby model under different indicators.

Key words Dual-standby systems, Markov renewal equation, Laplace-Stieltjes transform, model comparative analysis

Citation Jin Hai-Bo, Zhao Xin-Yue, Sang Yu. Research on optimal selection for cold/warm/hot-standby patterns of dual-standby systems. *Acta Automatica Sinica*, 2023, **49**(9): 2003−2018

高可靠控制系统在现代工业的诸多领域中越来越重要, 如航空航天、化工、核能、武器、生产制造等领域[1−3]. 实现控制系统高可靠性的一个主要手段是采用贮备技术. 目前, 对于一些先进生产制造企业, 具有双贮备设备的控制系统已逐渐涌现并凸显其作用[4]. 因此, 对这些双贮备系统的可靠性和经济性等指标进行定量分析和优化具有重要的理论意义

收稿日期 2020-07-11 录用日期 2020-10-19
Manuscript received July 11, 2020; accepted October 19, 2020
国家自然科学基金 (61602226, 62173171), 辽宁省自然科学基金 (2022-MS-397) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (61602226, 62173171) and Natural Science Foundation of Liaoning Province (2022-MS-397)
本文责任编委 王占山
Recommended by Associate Editor WANG Zhan-Shan
1. 辽宁工程技术大学软件学院智能信息处理实验室 葫芦岛 125105 2. 辽宁工程技术大学电子与信息工程学院 葫芦岛 125105
1. Laboratory of Intelligent Information Processing, School of Software, Liaoning Technical University, Huludao 125105 2. School of Electronics and Information Engineering, Liaoning Technical University, Huludao 125105

和实际价值.

贮备系统按照贮备设备在系统运行时是否失效通常分为: 冷贮备系统、热贮备系统和温贮备系统[5−6]. 冷贮备系统是指系统运行过程中, 贮备设备不参与工作也不老化. 对能耗要求极高的系统往往配成冷贮备系统, 如冶金系统、武器系统等[7]. 热贮备系统是指运行设备和贮备设备在相同的环境下工作, 因此两种设备的失效率相同. 热贮备系统主要是对系统切换时间要求极高的系统, 如网络打印机、飞机引擎等系统[8−9]. 温贮备系统是指贮备设备在系统工作期间参与工作, 但在温和的环境中工作其失效率小于运行设备. 对需要平衡切换时间和能耗的系统大都配成温贮备系统, 如电力系统、存储系统、高性能计算系统和飞机控制系统等[10−13].

由于三种贮备系统在不同应用领域中都有重要的作用, 因此学者们对每种贮备系统在故障检测、失效分析、可靠性分析、冗余分配及优化维修等方面都做了深入研究并取得了一定研究成果[14−15]. 在冷贮备系统研究方面, Chen 等[16] 对两部件冷贮备系统在不同失效机理的累积作用下进行了可靠性分析. 分析过程中作者考虑了部件工作状态和贮备状态之间的依赖关系, 评估了系统在不同失效机理影响下的动态演化过程, 计算了不同阶段应力持续影响下的部件损坏程度, 最后建立了基于改进的序列二值决策图方法的系统可靠性模型. Zhong 等[17] 对双设备组成的冷贮备控制系统提出了基于半 Markov 理论的最优预防维护策略. 所提策略中作者使用再生点技术和半 Markov 过程刻画了系统状态转移概率并用 Markov 更新理论建立了系统每个状态逗留时间分布的线性方程组, 最后以最大化系统寿命为目标, 优化了系统最优维护周期. Wang 等[18] 研究了由双设备组成的冷贮备系统的更换策略, 首先假设系统恶化过程服从广义 Polya 过程, 在此假设下, 作者以最小化系统长期平均费用率 (Cost rate) 为目标函数, 给出了系统的最优更换策略. 陈童等[19] 针对装备系统中多状态工作部件存在退化失效与突发失效竞争的情况, 以冷贮备系统为研究对象, 研究随机检测策略. 其中工作部件在各性能水平停留时间、各类维修时间等随机时间变量以及外部冲击的到达过程均采用相位型 (Phase-type, PH) 分布进行描述. 在此基础上, 建立了多状态冷贮备系统可靠性模型, 得到了系统可靠性主要参数的解析表达式. 在热贮备系统研究方面, 研究成果相对较少, 原因在于热贮备系统中的工作设备和贮备设备失效率相同且以并联方式工作. 因此热贮备的可靠性可完全借鉴并联系统的可靠性方法进行分析. 曹晋华等[20] 利用 Markov 更新过程和交替更新过程研究了两个不同部件组成的热贮备系统, 推导了系统首次失效时间与其后停工时间的联合分布、修理工在任一时刻忙的概率以及在 $(0, t]$ 内系统失效率的分布及其均值等性能指标. Patowary 等[21] 采用 Markov 模型结合故障树分析 (Fault tree analysis, FTA) 方法研究了热贮备微电网系统的可靠性, 所提方法与传统 Markov 和 FTA 方法相比能够适应不同的系统失效率. 与冷贮备系统相比, 温贮备系统中的贮备设备在贮备期间也逐渐恶化存在失效风险, 但失效风险小于热贮备系统. 从贮备设备失效率角度看, 冷贮备和热贮备属于温贮备的两个特例. 因此温贮备模型是更为一般的贮备模型, 这也导致温贮备系统的可靠性分析难度急剧增加. 在温贮备系统研究方面, 近年来涌现出许多重要成果. Huang 等[22] 以卫星数据处理子系统为背景, 研究了一类特殊结构的温贮备系统, 该类系统由两组相同数量的不同部件组成, 一组是工作部件, 另一组是温备份部件. 两组部件分别由两个电源供电. 对这类贮备系统, 作者给出了系统可靠度模型, 建立了各个部件可靠度的闭合方程组, 推导了系统可靠度的解析解. 然而, 该研究成果局限于各部件寿命都符合指数分布的情况, 对其他寿命分布不再适用. Ma 等[23] 研究了两部件温贮备冷却系统, 采用多阶段维纳过程刻画系统恶化趋势, 提出了基于温度检测数据的优化维护模型. 该模型中, 同时考虑稳态温度控制和系统寿命阈值, 优化系统整体维护费用. 尹东亮等[24] 对具有维修和保养两类活动的多状态温贮备系统进行了研究, 考虑了维修较保养具有更高优先级的情况. 用 PH 分布构建了系统状态转移矩阵, 推导了系统稳态可用度、系统故障率、平均故障间隔时间等可靠性指标. 刘宝亮等[25] 研究了修理设备和开关不完全可靠情形下的温贮备可修系统, 用补充变量法和 Laplace 变换相结合的方式推导了系统瞬时可用度. 该成果实际上是 Kuo 等[26] 研究成果的进一步扩展.

由此可见, 关于三种类型贮备系统的可靠性问题学者们做了大量研究, 同时取得了许多重要成果. 然而这些成果大多是针对“用一备一”的情况进行研究. 随着某些尖端系统对高可靠性的要求, “用一备二”的情形逐渐涌现. 对该类系统的研究也刚刚起步, 其研究成果也鲜有报道. 目前, 我国某自动化厂商已经开始研发具有双贮备设备 (即“用一备二”) 的控制系统, 对该种控制系统配成冷/温/热三种模型中的何种模型是研发过程中需要解决的关键问题之一, 具有现实意义. 原因在于最优贮备模型可以提高系统稳态可用度 (即可靠性), 降低维修人员忙期稳态概率以及系统稳态平均维修次数, 延长系统寿命. 除此之外, 在经济方面最优贮备模型还能降

低系统维修费用, 提高系统单位时间内产生的效益. 然而据作者查阅大量相关文献可知, 目前关于双贮备系统的最优贮备模型选择方面研究甚少, 没有可借鉴的通用方法. 因此如何建立系统三种贮备模型并给出确定不同条件下最优贮备模型的优化选择算法是主要研究难点. 为此, 本文用 Markov 及半 Markov 更新理论结合 Laplace 及 Laplace-Stieltjes 变换技术分析系统状态转移概率和系统再生状态的平均逗留时间, 推导系统稳态可用度、维修人员忙期稳态概率和系统稳态维修次数的可靠性指标以及系统单位时间内净收益的经济指标, 给出确定不同条件下贮备模型的优化选择算法.

为便于理解, 模型中主要变量和符号如表 1 和表 2 所示.

表 1　模型中主要变量说明

Table 1　Main variables involved in models

变量符号	变量含义
λ	运行设备失效率
λ_1	温贮备设备失效率
X	冷贮备模型中设备运行时的寿命
Z	冷贮备模型中设备失效后的维修时间
X_i	温贮备模型中第 i 个设备运行时的寿命
Y_i	温贮备模型中第 i 个设备贮备时的寿命
Z_i	温贮备模型中第 i 个设备失效后的维修时间
μ_i	系统在状态 S_i 的平均停留时间
$Q_{ij}(t)$	系统从进入状态 S_i 开始经过时间 t 后, 直接进入状态 S_j 的概率分布函数
$Q_{ij}^{(k)}(t)$	系统从进入状态 S_i 开始经过时间 t 后, 中间经过状态 S_k 后, 再进入状态 S_j 的概率分布函数
$q_{ij}(t)$	$Q_{ij}(t)$ 的导数, 系统由状态 S_i 到状态 S_j 的转移率
$F(t;\lambda)$	参数为 λ 的指数分布函数
$G(t)$, $G_1(t)$	分别为运行设备失效后和温贮备设备失效后的维修时间分布函数
$W(t)$	激活时间分布函数
$P_i(t)$	系统在状态 S_i 的存活函数, 即 $P_i(t)=P\{X>t\}$
$F^*(s)$	函数 $F(t)$ 经 Laplace 变换后的象函数
$\hat{F}(s)$	函数 $F(t)$ 经 Laplace-Stieltjes 变换后的象函数
$A_i(t)$	系统从进入状态 S_i 开始 $(t=0)$, 在 t 时刻的可用度
$\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$	分别为冷、温、热贮备系统稳态可用度
$B_i(t)$	系统从进入状态 S_i 开始 $(t=0)$, 维修人员在 t 时刻正在维修 (即忙期) 的概率
$\bar{B}_1$, $\bar{B}_2$, $\bar{B}_3$	分别为冷、温、热贮备系统稳态维修概率, 即维修人员忙期稳态概率
$V_i(t)$	系统从进入状态 S_i 开始 $(t=0)$, 维修人员在 $(0,\ t)$ 期间的维修次数
$\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{V}_3$	分别为冷、温、热贮备系统稳态平均维修次数
$\omega_i(t)$	系统从进入状态 S_i 开始 $(t=0)$, 在 t 时刻处于激活状态的概率
$\bar{\omega}_1$	冷贮备系统稳态激活概率

表 2　模型中主要符号说明

Table 2　Main symbols involved in models

符号	符号含义
S_i	系统状态 $(i=0,1,\cdots)$
Op	设备处于运行状态
Cs	设备处于冷贮备状态
Ws	设备处于温贮备状态
Fr	运行设备失效后处于维修状态
$Fr1$	温贮备设备失效后处于维修状态
FR	失效后的运行设备继续维修的状态
$FR1$	失效后的温贮备设备继续维修的状态
Fwr	运行设备失效后处于等待维修状态
$Fwr1$	温贮备设备失效后处于等待维修状态
Fra	正在维修的设备暂停维修的状态
Csa	冷贮备设备处于被激活状态

1　系统冷贮备模型分析

该模型下系统由三个同类型的设备组成, 其中一个运行, 另外两个冷贮备 (即贮备期间设备既不失效也不老化). 令随机变量 X 表示设备在运行期间的寿命, Z 表示失效设备的维修时间. 因为电子设备的寿命多数服从指数分布或近似服从指数分布[27], 而失效设备的维修时间由多种因素决定, 如维修人员的维修水平、失效设备的复杂程度以及维修工具的先进性等因素. 因此维修时间往往不服从某一特定类型的分布[28]. 所以设运行设备寿命服从参数为 λ 的指数分布 $F(t,\lambda)$, 失效设备维修时间服从一般分布 $G(t)$, 即 $X\sim F(t,\lambda)$, $Z\sim G(t)$. 经分析, 此系统共有 6 个不同状态:

$$S_0=(Op,Cs,Cs),\quad S_1=(Fwr,Csa,Cs)$$
$$S_2=(Fr,Op,Cs),\quad S_3=(Fra,Fwr,Csa)$$
$$S_4=(Fr,Fwr,Op),\quad S_5=(FR,Fwr,Fwr)$$

为了建立系统在再生状态下的更新方程, 需要将这些状态进行状态划分. 根据 $X\sim F(t,\lambda)$, $Z\sim G(t)$, 通过分析易知, 系统进入状态 S_0, S_1, S_2, S_3 和 S_4 的时刻均是系统的再生时刻 (又称再生点), 而进入状态 S_5 的时刻是非再生时刻. 因此 S_0, S_1, S_2, S_3 和 S_4 是再生状态, S_5 是非再生状态 (又称滑过状态) 且是失效状态. 状态之间的转移关系如图 1 所示.

1.1　系统半 Markov 核函数

令 $X(t)=S_j$ 表示时刻 t 系统处于状态 S_j, T_n 表示系统第 n 次状态转移时刻, $Z_n=X(T_n+0)$ 表示第 n 次转移时刻系统进入的状态, 容易验证 $\{Z_n,T_n,n\in\mathbf{N}\}$ 是状态空间 $E=\{S_j|j=0,\cdots,5\}$ 上

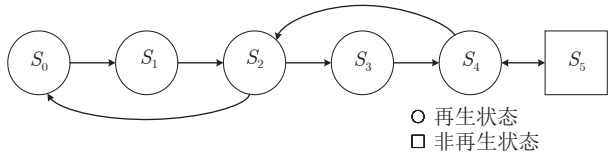

图 1 冷贮备系统状态转移图

Fig.1 State transition diagram of the cold-standby system

的 Markov 更新过程, $\{X(t), t \geq 0\}$ 是半 Markov 过程. 因此需对系统的半 Markov 核函数 $Q_{ij}(t)$, $i, j = 0, \cdots, 5$ 进行分析. 如图 1 所示.

1) 当系统处于 S_0 时, 如果运行设备失效, 则其中一个冷贮备设备被立刻激活, 此时系统转移至 S_1. 因此, $Q_{01}(t)$ 可表示为

$$Q_{01}(t) = P\{X < t\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \tag{1}$$

2) 当系统处于 S_1 时, 如果冷贮备设备激活完成, 则该设备进入运行状态, 且失效设备进入维修状态. 此时系统转移至 S_2. 因此, $Q_{12}(t)$ 可表示为

$$Q_{12}(t) = W(t) \tag{2}$$

3) 当系统处于 S_2 时, 此时有下述两种情况:

a) 如果维修设备在运行设备失效前修好, 则系统转移至 S_0. 因此, $Q_{20}(t)$ 可表示为

$$Q_{20}(t) = P\{X > Z, Z \leq t\} = \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}G(u) \tag{3}$$

b) 反之, 如果运行设备在维修设备修好前失效, 则该设备进入等待维修状态且维修设备立刻暂停维修, 冷贮备设备被激活. 此时系统转移至 S_3. 因此, $Q_{23}(t)$ 可表示为

$$Q_{23}(t) = P\{X < Z, X \leq t\} = \int_0^t \bar{G}(u)\mathrm{d}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\bar{G}(u)\mathrm{d}u \tag{4}$$

其中, $\bar{G}(u) = 1 - G(u)$.

4) 当系统处于 S_3 时, 冷贮备设备激活完成时, 该设备进入运行状态, 暂停维修的设备开始继续维修, 此时系统转移至 S_4. 因此, $Q_{34}(t)$ 可表示为

$$Q_{34}(t) = W(t) \tag{5}$$

5) 当系统处于 S_4 时, 此时有下述两种情况:

a) 如果维修设备在运行设备失效前修好, 则修好后的设备进入冷贮备状态, 等待维修的设备开始维修, 此时系统进入 S_2. 因此, $Q_{42}(t)$ 可表示为

$$Q_{42}(t) = P\{X > Z, Z \leq t\} = \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}G(u) \tag{6}$$

b) 反之, 如果运行设备在维修设备修好前失效, 则系统转移至 S_5. 因此, $Q_{45}(t)$ 可表示为

$$Q_{45}(t) = P\{X < Z, X \leq t\} = \int_0^\infty \bar{G}(u)\mathrm{d}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\bar{G}(u)\mathrm{d}u \tag{7}$$

由于 S_5 是非再生状态, 当正在维修设备修好后, 系统将由 S_5 再次转移至 S_4. 因此, $Q_{44}^{(5)}(t)$ 表示为

$$Q_{44}^{(5)}(t) = P\{X < Z, Z \leq t\} = \int_0^t (1 - \mathrm{e}^{-\lambda u})\mathrm{d}G(u) \tag{8}$$

1.2 系统所有再生状态的平均逗留时间

令 μ_i 和 $F_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, 分别表示系统在状态 S_i 的平均逗留时间和概率分布函数. 令 $P_i(t)$ 表示系统在状态 S_i 的存活函数, 即 $P_i(t) = 1 - F_i(t) = \bar{F}_i(t)$. 对每个状态的平均逗留时间 μ_i 进行分析可得

$$\mu_0 = \int_0^\infty t\mathrm{d}F_0(t) = \int_0^\infty P_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty P\{X_1 > t\}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \tag{9}$$

$$\mu_1 = \mu_3 = \int_0^\infty P_1(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \bar{W}(t)\mathrm{d}t \tag{10}$$

其中, $\bar{W}(t) = 1 - W(t)$

$$\mu_2 = \mu_4 = \int_0^\infty P_2(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty P\{Z > t, X > t\}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\bar{G}(t)\mathrm{d}t \tag{11}$$

1.3 系统性能指标

对系统稳态可用度、维修人员稳态忙期概率以及系统稳态平均维修次数三个性能指标进行分析.

1.3.1 系统稳态可用度

设当前时刻系统处于状态 S_0, 经过时间 t 后, 根据系统状态是否发生变化, 存在两种情况: 1) 如

果没有发生变化, 即系统依然停留在 S_0, 此种情况可表示为 $P\{X \geq t\}$. 此时系统的瞬时可用度为 $A_0(t) = P\{X \geq t\} \cdot 1 = P\{X \geq t\}$. 2) 如果系统状态发生变化, 如图 1 所示系统只能转移到 S_1. 此时根据 Markov 更新理论, 系统瞬时可用度为

$$A_0(t) = \int_0^t A_1(t-u)\mathrm{d}Q_{01}(u) = Q_{01}(t) * A_1(t) \quad (12)$$

其中, 符号 "$*$" 表示卷积运算符. 根据概率加法原理可得: $A_0(t) = Q_{01}(t) * A_1(t) + P\{X \geq t\}$. 同理可得系统在其余再生状态 S_1, S_2, S_3, S_4 下的瞬时可用度更新方程. 从而系统瞬时可用度的更新方程组为

$$\begin{cases} A_0(t) = Q_{01}(t) * A_1(t) + P\{X \geq t\} \\ A_1(t) = Q_{12}(t) * A_2(t) \\ A_2(t) = Q_{20}(t) * A_0(t) + Q_{23}(t) * A_3(t) + \\ \qquad P\{X \geq, Z \geq t\} \\ A_3(t) = Q_{34}(t) * A_4(t) \\ A_4(t) = Q_{42}(t) * A_2(t) + Q_{44}^{(5)}(t) * A_4(t) + \\ \qquad P\{X \geq t, Z \geq t\} \end{cases} \quad (13)$$

对式 (13) 进行 Laplace 变换得

$$\begin{cases} A_0^*(s) = \hat{Q}_{01}(s)A_1^*(s) + \dfrac{1}{\lambda + s} \\ A_1^*(s) = \hat{Q}_{12}(s)A_2^*(s) \\ A_2^*(s) = \hat{Q}_{20}(s)A_0^*(s) + \hat{Q}_{23}(s)A_3^*(s) + \bar{G}^*(\lambda + s) \\ A_3^*(s) = \hat{Q}_{34}(s)A_4^*(s) \\ A_4^*(s) = \hat{Q}_{42}(s)A_2^*(s) + \hat{Q}_{44}^{(5)}(s)A_4^*(s) + \bar{G}^*(\lambda + s) \end{cases} \quad (14)$$

解式 (14) 可得

$$A_0^*(s) = \frac{(\lambda + s)\, G^*(\lambda + s)\, \Gamma_1(s) + \Gamma_2(s)}{(\lambda+s)\left[\Gamma_3(s) - \hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{34}(s)\hat{Q}_{42}(s)\right]} \quad (15)$$

其中,

$$\Gamma_1(s) = \hat{Q}_{01}(s)\hat{Q}_{12}(s)\left(1 - \hat{Q}_{44}^{(5)}(s) + \hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{34}(s)\right)$$

$$\Gamma_2(s) = 1 - \hat{Q}_{44}^{(5)}(s) - \hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{34}(s)\hat{Q}_{42}(s)$$

$$\Gamma_3(s) = \left(1 - \hat{Q}_{01}(s)\hat{Q}_{12}(s)\hat{Q}_{20}(s)\right)\left(1 - \hat{Q}_{44}^{(5)}(s)\right)$$

根据 Abel 定理, 系统稳态可用度为

$$\bar{A}_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{A_0(t)}{t} = \lim_{s\to 0} sA_0^*(s) = \frac{N_A}{D} \quad (16)$$

其中,

$$N_A = p_{42}p_{20}\mu_0 + p_{42}\mu_2 + p_{23}\mu_4$$

$$D = p_{42}p_{20}(\mu_0 + \mu_1) + p_{42}\mu_2 + p_{23}p_{42}\mu_3 + p_{23}\mu_4$$

$$p_{ij} = \lim_{t\to\infty} Q_{ij}(t)$$

1.3.2　维修人员稳态忙期概率

与第 1.3.1 节类似, 首先建立维修人员在 t 时刻忙期的瞬时概率更新方程组

$$\begin{cases} B_0(t) = Q_{01}(t) * B_1(t) \\ B_1(t) = Q_{12}(t) * B_2(t) \\ B_2(t) = Q_{20}(t) * B_0(t) + Q_{23}(t) * B_3(t) + \\ \qquad P\{X \geq t, Z \geq t\} \\ B_3(t) = Q_{34}(t) * B_4(t) \\ B_4(t) = P\{X \geq t, Z \geq t\} + Q_{42}(t) * B_2(t) + \\ \qquad Q_{44}^{(5)}(t) * B_4(t) + P\{X < t, Z \geq t\} \end{cases} \quad (17)$$

对式 (17) 进行 Laplace 变换得

$$\begin{cases} B_0^*(s) = \hat{Q}_{01}(s)B_1^*(s) \\ B_1^*(s) = \hat{Q}_{12}(s)B_2^*(s) \\ B_2^*(s) = \hat{Q}_{20}(s)B_0^*(s) + \hat{Q}_{23}(s)B_3^*(s) + \bar{G}^*(\lambda + s) \\ B_3^*(s) = \hat{Q}_{34}(s)B_4^*(s) \\ B_4^*(s) = \hat{Q}_{42}(s)B_2^*(s) + \hat{Q}_{44}^{(5)}(s)B_4^*(s) + \bar{G}^*(s) \end{cases} \quad (18)$$

解式 (18) 可得

$$B_0^*(s) = \frac{\hat{Q}_{01}(s)\left(G^*(\lambda+s)\Gamma_4(s) + G^*(s)\hat{Q}_{12}(s)\Gamma_5(s)\right)}{\Gamma_6(s) - \hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{34}(s)\hat{Q}_{42}(s)} \quad (19)$$

其中,

$$\Gamma_4(s) = \hat{Q}_{12}(s)\left[1 - \hat{Q}_{44}^{(5)}(s)\right]$$

$$\Gamma_5(s) = \hat{Q}_{12}(s)\hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{34}(s)$$

$$\Gamma_6(s) = \left(1 - \hat{Q}_{01}(s)\hat{Q}_{12}(s)\hat{Q}_{20}(s)\right)\left(1 - \hat{Q}_{44}^{(5)}(s)\right)$$

根据 Abel 定理, 维修人员稳态忙期概率为

$$\bar{B}_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{B_0(t)}{t} = \lim_{s\to 0} sB_0^*(s) = \frac{N_B}{D} \quad (20)$$

其中, $N_B = p_{23}\displaystyle\int_0^\infty t\mathrm{d}G(t) + p_{42}\mu_2$.

1.3.3　系统稳态平均维修次数

同理, 建立系统在 $(0, t]$ 时间内维修次数的更新方程组

$$\begin{cases} V_0(t) = Q_{01}(t) * V_1(t) \\ V_1(t) = Q_{12}(t) * [V_2(t) + 1] \\ V_2(t) = Q_{20}(t) * V_0(t) + Q_{23}(t) * V_3(t) \\ V_3(t) = Q_{34}(t) * [V_4(t) + 1] \\ V_4(t) = Q_{42}(t) * [V_2(t) + 1] + Q_{44}^{(5)}(t) * [V_4(t) + 1] \end{cases} \tag{21}$$

对式 (21) 进行 Laplace-Stieltjes 变换得

$$\begin{cases} \hat{V}_0(s) = \hat{Q}_{01}(s)\hat{V}_1(s) \\ \hat{V}_1(s) = \hat{Q}_{12}(s)\hat{V}_2(s) + \hat{Q}_{12}(s) \\ \hat{V}_2(s) = \hat{Q}_{20}(s)\hat{V}_0(s) + \hat{Q}_{23}(s)\hat{V}_3(s) \\ \hat{V}_3(s) = \hat{Q}_{34}(s)\hat{V}_4(s) + \hat{Q}_{34}(s) \\ \hat{V}_4(s) = \hat{Q}_{42}(s)\hat{V}_2(s) + \hat{Q}_{44}^{(5)}(s)\hat{V}_4(s) + \\ \qquad \hat{Q}_{42}(s) + \hat{Q}_{44}^{(5)}(s) \end{cases} \tag{22}$$

解式 (22) 可得

$$\hat{V}_0(s) = \frac{\hat{Q}_{01}(s)\left(\Gamma_4(s) + \hat{Q}_{12}(s)\hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{34}(s)\right)}{\Gamma_6(s) - \hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{34}(s)\hat{Q}_{42}(s)} \tag{23}$$

其中, $\Gamma_4(s)$ 和 $\Gamma_6(s)$ 与式 (19) 中相同.

根据 Abel 定理, 可得系统稳态平均维修次数为

$$\bar{V}_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{V_0(t)}{t} = \lim_{s\to 0} s\hat{V}_0(s) = \frac{N_V}{D} \tag{24}$$

其中, $N_V = p_{23} + p_{42}$.

1.3.4 系统稳态激活概率

建立系统在 t 时刻的激活概率更新方程组

$$\begin{cases} \omega_0(t) = Q_{01}(t) * \omega_1(t) \\ \omega_1(t) = \bar{W}(t) + Q_{12}(t) * \omega_2(t) \\ \omega_2(t) = Q_{20}(t) * \omega_0(t) + Q_{23}(t) * \omega_3(t) \\ \omega_3(t) = \bar{W}(t) + Q_{34}(t) * \omega_4(t) \\ \omega_4(t) = Q_{42}(t) * \omega_2(t) + Q_{44}^{(5)}(t) * \omega_4(t) \end{cases} \tag{25}$$

对式 (25) 进行 Laplace 变换得

$$\begin{cases} \omega_0^*(s) = \hat{Q}_{01}(s)\omega_1^*(s) \\ \omega_1^*(s) = \bar{W}^*(s) + \hat{Q}_{12}(s)\omega_2^*(s) \\ \omega_2^*(s) = \hat{Q}_{20}(s)\omega_0^*(s) + \hat{Q}_{23}(s)\omega_3^*(s) \\ \omega_3^*(s) = \bar{W}^*(s) + \hat{Q}_{34}(t)\omega_4^*(s) \\ \omega_4^*(s) = \hat{Q}_{42}(s)\omega_2^*(s) + \hat{Q}_{44}^{(5)}(s)\omega_4^*(s) \end{cases} \tag{26}$$

解式 (26) 可得

$$\omega_0^*(s) = \frac{\hat{Q}_{01}(s)\bar{W}^*(s)\left(1 + \Gamma_7(s) - \Gamma_8(s)\right)}{\Gamma_6(s) - \hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{34}(s)\hat{Q}_{42}(s)} \tag{27}$$

其中,

$$\Gamma_7(s) = \hat{Q}_{12}(s)\hat{Q}_{23}(s)\left(1 + \hat{Q}_{44}^{(5)}(s)\right)$$

$$\Gamma_8(s) = \hat{Q}_{44}^{(5)}(s) + \hat{Q}_{23}(s)\hat{Q}_{34}(s)\hat{Q}_{42}(s)$$

$\Gamma_6(s)$ 与式 (19) 中相同.

根据 Abel 定理, 系统稳态激活概率为

$$\bar{\omega}_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{\omega_0(t)}{t} = \lim_{s\to 0} s\omega_0^*(s) = \frac{N_\omega}{D} \tag{28}$$

其中, $N_\omega = p_{01}p_{42}(p_{23} + p_{20})\mu_1$.

1.4 系统单位时间内产生的经济效益

系统单位时间内的经济效益 Θ_1 等于系统的运行收益减去设备的维修费用、支付给维修人员的费用、系统激活期间的停工费用以及系统的安装费用. 因此

$$\Theta_1 = c_0\bar{A}_1 - c_1\bar{B}_1 - c_2\bar{V}_1 - c_3\bar{\omega}_1 - 3I \tag{29}$$

其中, c_0, c_1, c_2, c_3 分别表示系统单位时间内的运行收益、设备维修费用、支付给维修人员的费用、停工费用, I 表示一个设备的安装费用.

2 系统温贮备模型分析

该模型下系统由三个同类型的设备组成, 其中一个设备运行, 另外两个设备温贮备 (即贮备设备在温和的环境下运行, 其失效率低于运行设备). 令随机变量 X_i, $i = 1, 2, 3$ 表示第 i 个设备在运行期间的寿命, Y_i 表示第 i 个设备在贮备期间的寿命, Z_i 表示第 i 个设备失效后的维修时间, $F(t, \lambda)$ 表示参数为 λ 的指数分布, $G(t)$ 和 $G_1(t)$ 表示一般分布. 假设运行设备和温贮备设备的寿命分别服从参数为 λ 和 λ_1 的指数分布, 即 $X_i \sim F(t, \lambda)$, $Y_i \sim F(t, \lambda_1)$. 运行设备和温贮备设备失效后的维修时间均服从一般分布, 但实际系统中这两种维修时间往往不同, 需要分别考虑. 因此, 如果 Z_i 是运行设备失效后的维修时间, 则 $Z_i \sim G(t)$; 反之, 如果 Z_i 是温贮备设备失效后的维修时间, 则 $Z_i \sim G_1(t)$. 为了便于描述模型, 进一步假设:

1) X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2 相互独立.

2) 系统不同状态之间的转移是瞬时的.

3) 设备失效后, 如果没有其他设备正在维修, 则维修人员立刻对该设备进行维修; 否则, 该设备进入等待状态直到其他设备维修完成. 设备修复后, 其寿命分布像新的设备一样.

经分析可得系统共有 13 个状态:

$S_0=(Op,\,Ws,\,Ws)$, $S_1=(Op,\,Fr1,\,Ws)$
$S_2=(Fr,\,Op,\,Ws)$, $S_3=(Op,\,FR1,\,Fwr1)$
$S_4=(Fwr,\,FR1,\,Op)$, $S_5=(Fwr,\,FR1,\,Fwr1)$
$S_6=(Fwr,\,FR1,\,Fwr)$, $S_7=(Fr,\,Op,\,Fwr)$
$S_8=(FR,\,Fwr,\,Fwr)$, $S_9=(FR,\,Fwr,\,Op)$
$S_{10}=(FR,\,Op,\,Fwr1)$, $S_{11}=(FR,\,Fwr,\,Fwr1)$
$S_{12}=(Op,\,Fwr,\,Fr1)$

与冷贮备模型分析过程相同, 经分析可得: S_0, S_1, S_2, S_7 和 S_{12} 是再生状态; S_3, S_4, S_5, S_6, S_8, S_9, S_{10} 和 S_{11} 是非再生状态; S_5, S_6, S_8 和 S_{11} 是失效状态. 状态之间的转移关系如图 2 所示.

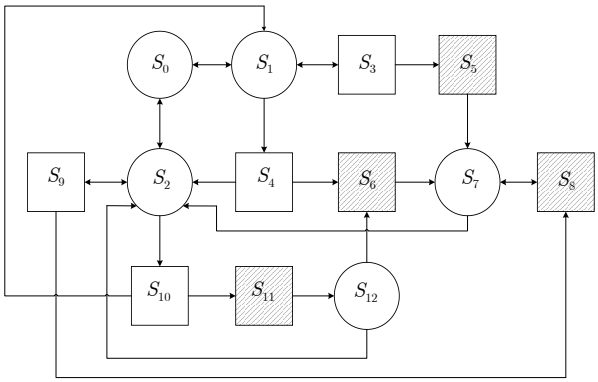

图 2　温贮备系统状态转移图
Fig. 2　State transition diagram of the warm-standby system

2.1　系统半 Markov 核函数

与第 1.1 节类似, 经分析可得温贮备模型下系统所有半 Markov 核函数为 (具体分析过程见附录 A)

$$Q_{01}(t)=\int_0^t 2\lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+2\lambda_1)u}\mathrm{d}u$$

$$Q_{02}(t)=\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+2\lambda_1)u}\mathrm{d}u$$

$$Q_{10}(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}\mathrm{d}G_1(u)$$

$$Q_{11}^{(3)}(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda u}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 u}\right)\mathrm{d}G_1(u)$$

$$Q_{15}^{(3)}(t)=\int_0^t \left(\lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\bar{G}_1(u)\mathrm{d}u$$

$$Q_{17}^{(3,5)}(t)=\int_0^t \left(\lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}*1\right)\mathrm{d}G_1(u)$$

$$Q_{12}^{(4)}(t)=\int_0^t \left(\lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\mathrm{d}G_1(u)$$

$$Q_{16}^{(4)}(t)=\int_0^t \left(\lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\bar{G}_1(u)\mathrm{d}u$$

$$Q_{17}^{(4,6)}(t)=\int_0^t \left(\lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}*1\right)\mathrm{d}G_1(u)$$

$$Q_{20}(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}\mathrm{d}G(u)$$

$$Q_{21}^{(10)}(t)=\int_0^t \left(\lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\mathrm{d}G(u)$$

$$Q_{2,11}^{(10)}(t)=\int_0^t \left(\lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\bar{G}(u)\mathrm{d}u$$

$$Q_{2,12}^{(10,11)}(t)=\int_0^t \left(\lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}*1\right)\mathrm{d}G(u)$$

$$Q_{22}^{(9)}(t)=\int_0^t \left(\lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\mathrm{d}G(u)$$

$$Q_{2,7}^{(9,8)}(t)=\int_0^t \left(\lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}*1\right)\mathrm{d}G(u)$$

$$Q_{72}(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}G(u)$$

$$Q_{77}^{(8)}(t)=\int_0^t \left(\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}*1\right)\mathrm{d}G(u)$$

$$Q_{12,2}(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}G_1(u)$$

$$Q_{12,7}^{(6)}(t)=\int_0^t \left(\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}*1\right)\mathrm{d}G_1(u)$$

2.2　系统在所有再生状态的平均逗留时间

与第 1.2 节类似, 经分析可得系统在每个再生状态的平均逗留时间 μ_i, $i=0,1,2,7,12$ 为 (具体分析过程见附录 B)

$$\mu_0=\frac{1}{\lambda+2\lambda_1},\qquad \mu_1=\frac{1-g_1^*(\lambda+\lambda_1)}{\lambda+\lambda_1}$$

$$\mu_2=\frac{1-g^*(\lambda+\lambda_1)}{\lambda+\lambda_1},\quad \mu_7=\frac{1-g^*(\lambda)}{\lambda}$$

$$\mu_{12}=\frac{1-g_1^*(\lambda)}{\lambda}$$

其中, $g^*(\lambda)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}G(t)$, $g_1^*(\lambda)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}G_1(t)$.

2.3 系统性能指标

本节对系统的稳态可用度、维修人员稳态忙期概率和系统稳态平均维修次数三个性能指标进行分析.

2.3.1 系统稳态可用度

与第 1.3.1 节类似, 经分析可得系统稳态可用度为

$$\bar{A}_2 = \lim_{s\to 0}\frac{sN_1(s)}{D_1(s)} \tag{30}$$

其中, $D_1(s)$ 和 $N_1(s)$ 分别为

$$D_1(s) = \begin{vmatrix} 1 & -\hat{Q}_{01}(s) & -\hat{Q}_{02}(s) & 0 & 0 \\ -\hat{Q}_{10}(s) & 1-\hat{Q}_{11}^{(3)}(s) & -\hat{Q}_{12}^{(4)}(s) & -\hat{Q}_{17}^{(35)}(s)-\hat{Q}_{17}^{(46)}(s) & 0 \\ -\hat{Q}_{20}(s) & -\hat{Q}_{21}^{(10)}(s) & 1-\hat{Q}_{22}^{(9)}(s) & -\hat{Q}_{27}^{(98)}(s) & -\hat{Q}_{2,12}^{(10,11)}(s) \\ 0 & 0 & -\hat{Q}_{72}(s) & 1-\hat{Q}_{77}^{(8)}(s) & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{Q}_{12,2}(s) & -\hat{Q}_{12,7}^{(6)}(s) & 1 \end{vmatrix}$$

$$N_1(s) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{s+\lambda+2\lambda_1} & -\hat{Q}_{01}(s) & -\hat{Q}_{02}(s) & 0 & 0 \\ \dfrac{1-\hat{G}_1(s+\lambda+\lambda_1)}{s+\lambda+\lambda_1} & 1-\hat{Q}_{11}^{(3)}(s) & -\hat{Q}_{12}^{(4)}(s) & -\hat{Q}_{17}^{(35)}(s)-\hat{Q}_{17}^{(46)}(s) & 0 \\ \dfrac{1-\hat{G}(s+\lambda+\lambda_1)}{s+\lambda+\lambda_1} & -\hat{Q}_{21}^{(10)}(s) & 1-\hat{Q}_{22}^{(9)}(s) & -\hat{Q}_{17}^{(98)}(s) & -\hat{Q}_{2,12}^{(10,11)}(s) \\ \dfrac{1-\hat{G}(s+\lambda)}{s+\lambda} & 0 & -\hat{Q}_{72}(s) & 1-\hat{Q}_{77}^{(8)}(s) & 0 \\ \dfrac{1-\hat{G}_1(s+\lambda)}{s+\lambda} & 0 & -\hat{Q}_{12,2}(s) & -\hat{Q}_{12,7}^{(6)}(s) & 1 \end{vmatrix}$$

2.3.2 维修人员稳态忙期概率

与第 1.3.2 节类似, 经分析可得维修人员稳态忙期概率为

$$\bar{B}_2 = \frac{sN_2(s)}{D_1(s)} \tag{31}$$

其中, $N_2(s)$ 为

$$N_2(s) = \begin{vmatrix} 0 & -\hat{Q}_{01}(s) & -\hat{Q}_{02}(s) & 0 & 0 \\ \dfrac{1-\hat{G}_1(s+\lambda+\lambda_1)}{s+\lambda+\lambda_1} & 1-\hat{Q}_{11}^{(3)}(s) & -\hat{Q}_{12}^{(4)}(s) & -\hat{Q}_{17}^{(35)}(s)-\hat{Q}_{17}^{(46)}(s) & 0 \\ \dfrac{1-\hat{G}(s+\lambda+\lambda_1)}{s+\lambda+\lambda_1} & -\hat{Q}_{21}^{(10)}(s) & 1-\hat{Q}_{22}^{(9)}(s) & -\hat{Q}_{17}^{(98)}(s) & -\hat{Q}_{2,12}^{(10,11)}(s) \\ \dfrac{1-\hat{G}(s+\lambda)}{s+\lambda} & 0 & -\hat{Q}_{72}(s) & 1-\hat{Q}_{77}^{(8)}(s) & 0 \\ \dfrac{1-\hat{G}_1(s+\lambda)}{s+\lambda} & 0 & -\hat{Q}_{12,2}(s) & -\hat{Q}_{12,7}^{(6)}(s) & 1 \end{vmatrix}$$

2.3.3 系统稳态平均维修次数

与第 1.3.3 节类似, 经分析可得系统稳态平均维修次数为

$$\bar{V}_2 = \frac{sN_3(s)}{D_1(s)} \tag{32}$$

其中, $N_3(s)$ 为

$$N_3(s) = \begin{vmatrix} \varphi_0(s) & -\hat{Q}_{01}(s) & -\hat{Q}_{02}(s) & 0 & 0 \\ \varphi_1(s) & 1-\hat{Q}_{11}^{(3)}(s) & -\hat{Q}_{12}^{(4)}(s) & -\hat{Q}_{17}^{(35)}(s)-\hat{Q}_{17}^{(46)}(s) & 0 \\ \varphi_2(s) & -\hat{Q}_{21}^{(10)}(s) & 1-\hat{Q}_{22}^{(9)}(s) & -\hat{Q}_{17}^{(98)}(s) & -\hat{Q}_{2,12}^{(10,11)}(s) \\ \varphi_7(s) & 0 & -\hat{Q}_{72}(s) & 1-\hat{Q}_{77}^{(8)}(s) & 0 \\ \varphi_{12}(s) & 0 & -\hat{Q}_{12,2}(s) & -\hat{Q}_{12,7}^{(6)}(s) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\varphi_0(s) = \hat{Q}_{01}(s) + \hat{Q}_{02}(s)$$

$$\varphi_1(s) = \hat{Q}_{11}^{(3)}(s) + \hat{Q}_{12}^{(4)}(s) + \hat{Q}_{17}^{(35)}(s) + \hat{Q}_{17}^{46}(s)$$

$$\varphi_2(s) = \hat{Q}_{21}^{(10)}(s)+\hat{Q}_{22}^{(9)}(s)+\hat{Q}_{27}^{(98)}(s)+\hat{Q}_{2,12}^{(10,11)}(s)$$

$$\varphi_7(s) = \hat{Q}_{72}(s) + Q_{77}^{(8)}(s)$$

$$\varphi_{12}(s) = \hat{Q}_{12,2}(s) + \hat{Q}_{12,7}^{(6)}(s)$$

2.4 系统单位时间内产生的经济收益

与第 1.4 节类似, 温贮备系统单位时间内产生的经济效益 Θ_2 可表示为

$$\Theta_2 = c_4\bar{A}_2 - c_5\bar{B}_2 - c_6\bar{V}_2 - 3I \tag{33}$$

其中, 参数 c_4, c_5, c_6 的含义分别与式 (29) 中的 c_0, c_1, c_2 相同.

3 系统热贮备模型分析

双贮备设备下热贮备系统实质上是三个设备以并联的方式工作. 该模型中不考虑某个设备失效后负载均衡对其他运行设备失效率造成的影响. 因此三个设备的失效率和维修率均视为相同. 实际上, 该模型的分析方法与温贮备系统模型的分析方法相同, 在分析过程中只需令 $\lambda_1 = \lambda$, $\beta_1 = \beta$ 即可. 因此, 该模型的分析过程略. 下面只给出系统单位时间内的净收益函数

$$\Theta_3 = c_7\bar{A}_3 - c_8\bar{B}_3 - c_9\bar{V}_3 - 3I \tag{34}$$

其中, 参数 c_7, c_8, c_9 的含义分别与式 (29) 中的 c_0, c_1, c_2 相同.

4 系统冷/温/热贮备模型优化选择算法

从系统性能指标 (即稳态可用度、维修人员稳态忙期概率、系统稳态平均维修次数) 以及经济指标 (即系统单位时间内净收益) 两个方面, 分别给出双贮备系统冷/温/热贮备模型的优化选择算法.

算法 1. 以系统性能为目标的双贮备系统冷/温/热贮备模型优化选择算法

输入. 参数 λ, λ_1, β, β_1, γ, σ, 某系统性能指标.

输出. 该性能指标下的最优贮备模型.

算法流程:

1. 初始化参数 λ, λ_1, β, β_1, γ, σ; 定义数组类型变量 Models 并初始化 Models = [“冷贮备”, “温贮备”, “热贮备”]; 初始化循环变量 $i = 0$;
2. **While** $i < 3$
   - 2.1 计算 models [i] 模型下的所有半 Markov 核函数 $Q_{ij}^{(k)}(t)$.
   - 2.2 计算 models [i] 模型下的每个状态的平均逗留时间 u_i.
   - 2.3 根据 $Q_{ij}^{(k)}(t)$ 和 μ_i 建立系统该性能指标下的瞬时更新方程组.
   - 2.4 对瞬时更新方程组进行 Laplace 或 Laplace-Stieltjes 变换并进行求解, 得到该性能指标的表达式: A_i, B_i 或 V_i.
   - 2.5 更新循环变量 $i \leftarrow i + 1$.

   End while
3. 将参数 λ, λ_1, β, β_1, γ, σ 代入 $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$ 或 $\bar{V}_i$ 并计算结果.
4. 通过结果比较, 输出该性能指标下 $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$ 或 $\bar{V}_i$ 最优值对应的贮备模型.

算法 2. 以系统单位时间内净收益为目标的双贮备系统冷/温/热贮备模型优化选择算法

输入. 参数 λ, λ_1, β, β_1, γ, σ, c_i, $i = 0, \cdots, 9$, I.

输出. 以系统单位时间内净收益为目标的系统最优贮备模型.

算法流程:

1. 初始化参数 λ, λ_1, β, β_1, γ, σ, c_i, $i = 0, 1, \cdots, 9$, I.
2. 令系统性能指标分别为稳态可用度、维修人员稳态忙期概率、系统稳态平均维修次数, 并将其与参数 λ, λ_1, β, β_1, γ, σ 代入算法 1, 分别得到 A_i, B_i 和 V_i, $i = 0, 1, 2$.
3. 将参数 c_i, $i = 1, \cdots, 9$, I 以及计算结果 $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{V}_i$, $i = 1, 2, 3$ 分别代入 Θ_1, Θ_2 和 Θ_3.
4. 分别以系统单位时间内运行收益、设备维修费用、支付给维修人员费用为研究对象, 建立不等式:

   情况 a):

   $$\Theta_1 \geq \max(\Theta_2, \Theta_3) \text{ (对应冷贮备模型最优)};$$

   情况 b):

   $$\Theta_2 \geq \max(\Theta_1, \Theta_3) \text{ (对应温贮备模型最优)};$$

   情况 c):

   $$\Theta_3 \geq \max(\Theta_1, \Theta_2) \text{ (对应热贮备模型最优)}.$$
5. 求解步骤 4 中的不等式, 在参数取值范围内如果不等式有解, 则输出相应研究对象下该不等式对应的最优贮备模型.

5 实例分析

以实际的双贮备 PLC (Programmable logic controller) 控制系统 (如图 3 所示) 为研究对象, 进行实例分析. 从系统性能指标, 即系统稳态可用度、维修人员稳态忙期概率、系统稳态平均维修次数, 以及经济指标, 即系统单位时间内净收益两个方面, 对系统贮备模型优化算法的输入参数进行假设.

为了给出合理的参数假设, 首先对图 3 所示的系统进行简要描述. 该 PLC 控制系统是我国某自动化厂商自主研制的高可靠双贮备控制系统. 系统中每个 PLC 设备经过加速寿命测试后得到平均工作寿命约为 1 800 天, 因此运行设备的平均失效率

图 3 双贮备冗余控制系统

Fig. 3 Redundancy control system with dual-standby device

设为 $\lambda = 0.00055$ (个/天). 温贮备设备失效率与工作环境有关, 设其为 $\lambda_1 \in [0.00001, 0.00055]$ (个/天). 维修时间一般服从指数分布, 即 $G(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta t}$, $G_1(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\beta_1 t}$. 其中参数 β, β_1 分别表示运行设备和温贮备设备失效后的平均维修率. 实际上, 设备失效后需要返厂、检测、维修、测试、现场安装调试、重新运行等环节. 因此根据设备历史维修数据可得运行设备失效后从返厂到重新运行约为 7 ~ 30 天, 温贮备设备约为 5 到 15 天. 因此设 $\beta \in [0.03, 0.14]$ (个/天), $\beta_1 = [0.067, 0.2]$ (个/天). 该系统如果配成冷贮备模式, 则当运行设备失效后, 冷贮备设备能够自动上电并上载控制程序以及导入设备失效前的数据, 整个激活过程需要 3 min 左右. 通过对历史激活数据的统计分析可得贮备设备激活时间服从正态分布, 即

$$W(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\gamma - \mathrm{t})^2}{2\sigma^2}\right)$$

其中, 参数 γ 和 σ 分别代表均值和方差. 因此设 $\gamma = 0.0021$ (天), $\sigma = 0.0007$.

5.1 以系统性能为目标的实例分析

5.1.1 以稳态可用度为目标的实例分析

令 $\lambda = 0.00055$, $\lambda_1 = 0.00011$, $\beta = 0.05$, $\beta_1 = 0.1$, $\gamma = 0.0021$, $\sigma = 0.0007$, 系统性能指标为稳态可用度. 将这些参数代入算法 1, 在 MATLAB (2014b) 环境下运行算法 1 (公式推导部分利用 MATLAB 的符号计算), 其计算结果如表 3 所示.

表 3 系统稳态可用度

Table 3 System steady-state availability

	系统模型		
	模型 I	模型 II	模型 III
$\bar{A}_i$	1.0000	0.9967	0.9845

表 3 中, 模型 I、模型 II 和模型 III 分别表示冷贮备模型、温贮备模型和热贮备模型. 由表 3 可知, $\bar{A}_1 > \bar{A}_2 > \bar{A}_3$. 因此以系统稳态可用度为目标时, 算法 1 输出为: 冷贮备是最优贮备模型. 由于温贮备设备的失效率与其工作环境有关, 因此属于可变参数, 为了研究该参数对系统稳态可用度的影响, 令 λ_1 从 0.00001 变化到 0.00055, 步长为 0.00001, 其他参数不变. 将这些参数重新代入算法 1, 其计算结果如图 4 所示.

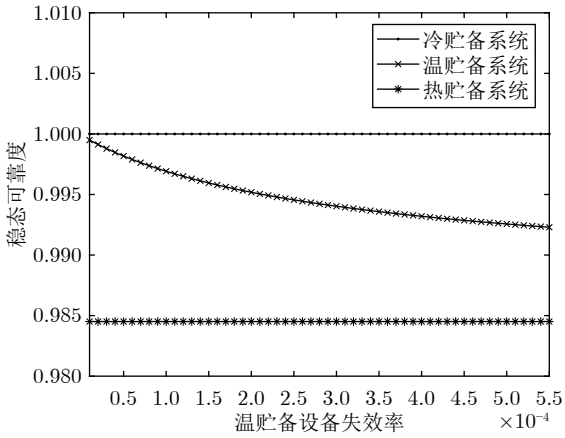

图 4 λ_1 对三个模型的稳态可用度的影响

Fig. 4 Impact of λ_1 on steady-state available of the three models

由图 4 可知, 温贮备系统的稳态可用度随 λ_1 的增加而降低. $\forall \lambda_1 \in [0.00001, 0.00055]$, 温贮备系统的稳态可用度均小于冷贮备系统, 但均大于热贮备系统. 可见温贮备设备的失效率对温贮备系统稳态可用度有一定影响, 但对算法 1 输出结果即最优贮备模型没有影响.

5.1.2 以维修人员忙期稳态概率为目标的实例分析

参数 λ, λ_1, β, β_1, γ, σ 取值与第 5.1.1 节相同, 系统性能指标为维修人员忙期稳态概率. 将这些参数代入算法 1, 其计算结果如表 4 所示.

表 4 维修人员忙期稳态概率

Table 4 Steady-state probability of repairmen busy

	系统模型		
	模型 I	模型 II	模型 III
$\bar{B}_i$	0.0110	0.0131	0.0323

由表 4 可知, $\bar{B}_1 < \bar{B}_2 < \bar{B}_3$. 因此以维修人员稳态忙期概率为目标时, 算法 1 输出结果为: 冷贮备是最优贮备模型. 实际上, 运行设备和温贮备设备失效后的维修率 (即参数 β, β_1) 对维修人员稳态忙期概率有直接影响, 因此, 令 $\beta \in [0.03, 0.14]$, $\beta_1 = [0.067, 0.2]$, 两个参数的变化步长均设为 0.005, 其他参数不变, 研究 β 对 $\bar{B}_1$, $\bar{B}_3$ 的影响以及 β, β_1 对 $\bar{B}_2$ 的影响. 其结果分别如图 5 和图 6 所示.

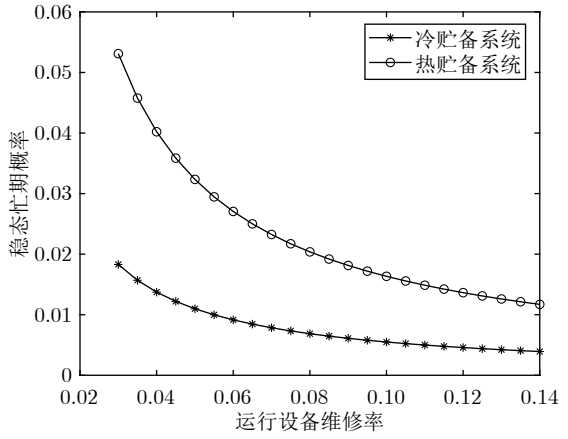

图 5　运行设备维修率对冷、热贮备系统中维修人员稳态忙期概率的影响

Fig. 5　Impact of repair rates for the working device on steady-state probability of repairmen busy for cold, hot-standby system

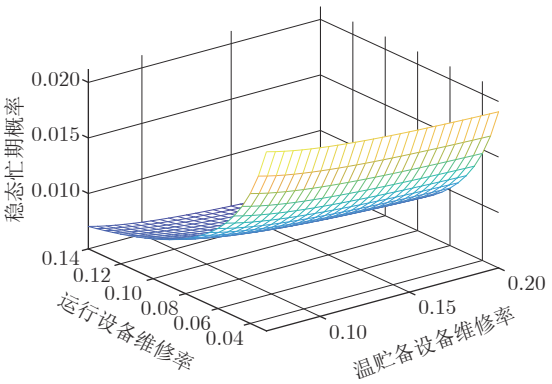

图 6　运行设备和温贮备设备的维修率对温贮备系统中维修人员稳态忙期概率的影响

Fig. 6　Impact of repair rates for the working and warm-standby devices on steady-state probability of repairmen busy for warm-standby system

由图 5 可知, 在参数 β 的取值范围内变化时, $\bar{B}_1$ 均小于 $\bar{B}_3$. 说明以维修人员稳态忙期概率为目标时, 算法 1 输出是: 冷贮备是最优贮备模型. 由图 6 可知, $\bar{B}_2$ 随 β, β_1 的增大呈非线性减小. 从数值计算结果可知: 当 β 取值相同时, $\bar{B}_1 < \bar{B}_2 < \bar{B}_3$ 总成立. 说明在相同的运行设备维修率下, 算法 1 输出依然是: 冷贮备是最优贮备模型.

5.1.3　以系统稳态平均维修次数为目标的实例分析

参数 λ, λ_1, β, β_1, γ, σ 取值与第 5.1.1 节相同, 系统性能指标为系统稳态平均维修次数. 将这些参数代入算法 1. 其计算结果如表 5 所示.

由表 5 可知, $\bar{V}_1 < \bar{V}_2 < \bar{V}_3$. 因此以系统稳态平均维修次数为目标时, 算法 1 输出结果是: 冷贮备是最优贮备模型. 运行设备维修率对冷、温、热贮备系统都有重要影响. 除此之外, 温贮备系统还受温贮备设备失效率的影响. 因此, 令 $\lambda_1 \in [0.00011, 0.00055]$, $\beta \in [0.03, 0.14]$, 步长分别设为 0.00001 和 0.005, 其他参数不变, 研究 β 对 $\bar{V}_1$, $\bar{V}_3$ 的影响以及 β, λ_1 对 $\bar{V}_2$ 的影响. 其结果分别如图 7 和图 8 所示.

表 5　系统稳态平均维修次数

Table 5　Mean repair number of the system in steady-state

	系统模型		
	模型 I	模型 II	模型 III
$\bar{V}_i$	0.00056	0.00077	0.00170

由图 7 可知, 在 $\beta \in [0.03, 0.14]$ 时, $\bar{V}_3 > \bar{V}_1$, 无论设备维修率取值如何, 冷贮备系统稳态维修次数小于热贮备系统. 由图 8 可知, 参数 β, λ_1 和变量 $\bar{V}_2$

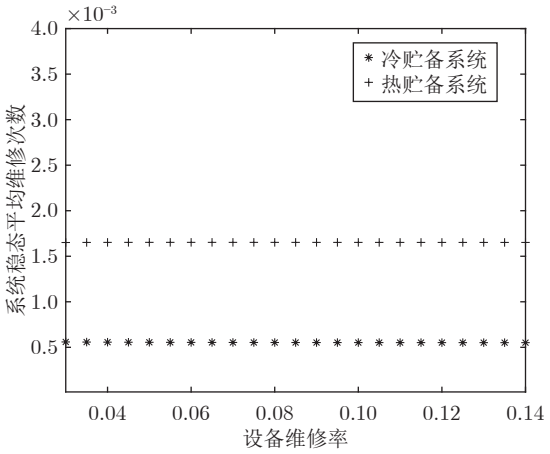

图 7　设备维修率对冷、热贮备系统稳态平均维修次数的影响

Fig. 7　Impact of repair rate on mean repair number of the cold, hot-standby systems in steady-state

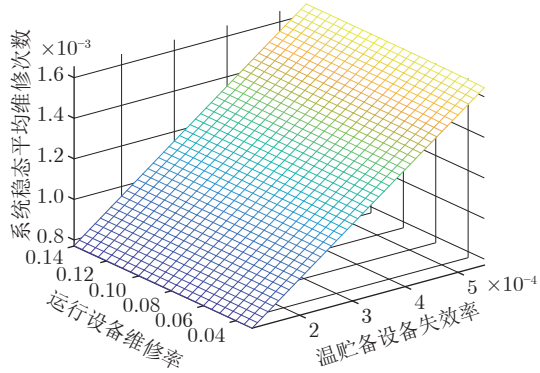

图 8　运行设备的维修率和温贮备设备的失效率对系统稳态平均维修次数的影响

Fig. 8　Impact of repair rate of the working device and failure rate of the warm-standby device on repair number of the system in steady-state

构成一个平面, 说明 $\bar{V}_2$ 与 β, λ_1 呈线性变化关系. 另外从数值结果可知, 在 $\beta \in [0.03, 0.14]$, $\lambda_1 \in [0.00011, 0.00055]$ 范围时, $\bar{V}_3 > \bar{V}_2 > \bar{V}_1$ 成立. 说明温贮备系统的稳态平均维修次数小于热贮备系统, 但大于冷贮备系统. 因此. 当以系统稳态平均维修次数为目标时, 算法输出依然是冷贮备是最优贮备模型.

5.2 以系统经济效益为目标的实例分析

根据系统应用案例中的历史财务数据和历史维修费用记录, 给出三个模型下净收益中费用的合理范围: 设 $c_0, c_4, c_7 \in [1\,000, 5\,000]$ (元/h), $c_1, c_5, c_8 \in [300, 500]$ (元/h), $c_2, c_6, c_9 \in [300, 700]$ (元/h). 实际上, 冷贮备系统激活期间的停机对于不同行业的生产制造企业带来的经济损失或产生的费用大相径庭、难以估计. 但根据使用该系统的某生产企业的停机记录, 停机费用的合理范围为: $c_3 \in [500, 1\,000]$ (元/h), 系统安装费用的合理范围为: $I \in [100, 300]$ (元/h).

5.2.1 以系统单位时间内运行收益为研究对象

令参数 λ, λ_1, β, β_1, γ, σ 取值与第 5.1.1 节相同, 令参数 $c_1 = 400$, $c_2 = 500$, $c_3 = 800$, $c_5 = 100$, $c_6 = 200$, $c_8 = 300$, $c_9 = 500$, $I = 200$, $c_0, c_4, c_7 \in [1\,000, 5\,000]$. 将以上参数代入算法 2, 其计算结果如下.

对于情况 a), 化简后最终不等式为

$$\max(0.9967c_4 + 3.2273, 0.9845c_7 - 5.9432, 1\,000) \le c_0 \le 5\,000$$

该不等式在 $\forall c_0, c_4, c_7 \in [1\,000, 5\,000]$ 取值范围内有解, 即 $\Theta_1 \ge \max(\Theta_2, \Theta_3)$ 成立, 此时算法 2 输出结果是: 冷贮备是最优贮备模型.

对于情况 b), 化简后的最终不等式为

$$\max(1.0033c_0 - 3.2273, 0.9878c_7 - 9.0978, 1\,000) \le c_4 \le 5\,000$$

该不等式在 $\forall c_0, c_4, c_7 \in [1\,000, 5\,000]$ 取值范围内有解, 即 $\Theta_2 \ge \max(\Theta_1, \Theta_3)$ 成立, 此时算法 2 输出结果是: 温贮备是最优贮备模型.

对于情况 c), 化简后最终不等式为

$$c_7 \ge \max(1.0157c_0 + 5.9442, 1.0124c_4 + 9.2105)$$

该不等式在 $\forall c_0, c_4, c_7 \in [1\,000, 5\,000]$ 取值范围内有解, 即 $\Theta_3 \ge \max(\Theta_1, \Theta_2)$ 成立, 此时算法 2 输出结果是: 热贮备是最优贮备模型.

5.2.2 以系统单位时间内设备维修费用为研究对象

令 $c_0 = 3\,000$, $c_4 = 3\,000$, $c_7 = 3\,000$, $c_1, c_5, c_8 \in [300, 500]$, 其他参数与第 5.2.1 节相同. 将以上参数代入算法 2, 其计算结果如下.

对于情况 a), 化简后的最终不等式为

$$300 \le c_1 \le \min t(1.1892c_5 + 909.6062, 2.9405c_8 + 4\,173.9914, 500)$$

该不等式在 $\forall c_1, c_5, c_8 \in [300, 500]$ 取值范围内恒成立, 即 $\Theta_1 \ge \max(\Theta_2, \Theta_3)$ 恒成立, 此时算法 2 输出结果是: 冷贮备是最优贮备模型.

对于情况 b) 和情况 c), 化简后分别得最终不等式为

$$300 \le c_5 \le \min(0.8409c_1 - 764.9161, 2.4728c_8 + 2\,745.1231, 500)$$

$$300 \le c_8 \le \min(0.3401c_1 - 1\,419.4655, 0.4044c_5 - 1\,110.1322, 500)$$

然而, 在 $\forall c_1, c_5, c_8 \in [300, 500]$ 取值范围内, 以上两个不等式均无解. 即, $\Theta_2 \ge \max(\Theta_1, \Theta_3)$ 和 $\Theta_3 \ge \max(\Theta_1, \Theta_2)$ 均不成立, 此时算法 2 无输出. 说明以系统单位时间内设备维修费用为研究对象时, 无论参数如何取值, 冷贮备均是最优贮备模型.

5.2.3 以单位时间内支付给维修人员的费用为研究对象

令 $c_0 = 3\,000$, $c_4 = 3\,000$, $c_7 = 3\,000$, $c_2, c_6, c_9 \in [300, 700]$, 其他参数取值与第 5.2.1 节相同. 将以上参数代入算法 2, 其计算结果如下.

对于情况 a), 化简后的最终不等式为

$$300 \le c_2 \le \min(1.3865c_6 + 16\,276.7, 2.9724c_9 + 68\,210.4, 700)$$

该不等式在 $\forall c_2, c_6, c_9 \in [300, 700]$ 取值范围内恒成立, 即 $\Theta_1 \ge \max(\Theta_2, \Theta_3)$ 恒成立. 此时算法 2 输出结果是: 冷贮备是最优贮备模型.

对于情况 b) 和情况 c), 化简后分别得到的最终不等式为

$$300 \le c_6 \le \min(0.7213c_2 - 11\,739.5, 2.1438c_9 + 47\,356.9, 700)$$

$$300 \le c_9 \le \min(0.3364c_2 - 22\,947.8, 0.4665c_6 - 17\,471.8, 700)$$

然而, 在 $\forall c_2, c_6, c_9 \in [300, 700]$ 取值范围内, 以上两个不等式均无解, 即 $\Theta_2 \ge \max(\Theta_1, \Theta_3)$ 和 $\Theta_3 \ge \max(\Theta_1, \Theta_2)$ 均不成立. 此时算法 2 无输出. 说明以系统单位时间内支付给维修人员费用为研究对象时, 无论参数如何取值, 冷贮备均是最优贮备模型.

6 结束语

针对选择哪种贮备模型才能使双贮备系统实现

性能和经济效益最优的问题, 本文创新性地提出了双贮备系统贮备模型优化选择算法. 通过分析系统状态及半 Markov 核函数分别建立了系统冷/温/热贮备模型下的更新方程组, 利用 Laplace、Laplace-Stieltjes 变换技术和 Abel 定理求得了系统稳态可用度、维修人员稳态忙期概率和系统稳态平均维修次数的系统性能指标, 并给出了系统单位时间内净收益的目标函数, 之后通过模型对比分析给出了分别以系统性能指标和经济指标为目标的系统贮备模型优化选择算法. 最后以实际的国产双贮备控制系统作为研究对象, 对所提算法进行实例分析, 实例结果表明所提算法能够有效地确定系统在不同条件下的最优贮备模型. 本文是在系统确定参数或确定参数变化范围的情况下进行研究的. 然而对于某些实际的工业现场, 现场环境复杂, 系统部分参数无法测量, 这些参数属于不确定参数. 对具有不确定参数的双贮备系统如何进行分析、建模并给出贮备模型的优化选择算法是下一步重点研究的问题.

附录 A

对温贮备模型下系统所有半 Markov 核函数进行分析如下.

1) 当系统处于 S_0 时, 如果其中一个温贮备设备先于运行设备失效, 则系统转移至 S_1. 此时有

$$Q_{01}(t) = P\left\{X_1 > \min\left(Y_2, Y_3\right), \min\left(Y_2, Y_3\right) \le t\right\} = \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}P\left\{\min\left(Y_2, Y_3\right) \le u\right\} = \int_0^t 2\lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+2\lambda_1)u}\mathrm{d}u$$

反之, 如果运行设备先于温贮备设备失效, 则系统转移至 S_2. 此时有

$$Q_{02}(t) = P\left\{\min\left(Y_2, Y_3\right) > X_1, X_1 \le t\right\} = \int_0^t P\left\{\min\left(Y_2, Y_3\right) > X_1\right\}\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda u}\right) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+2\lambda_1)u}\mathrm{d}u$$

2) 当系统处于 S_1 时, 此时有下述几种情况:

a) 如果失效设备在运行设备和温贮备设备失效前已修好, 则系统转移至 S_0. 此时有

$$Q_{10}(t) = P\left\{X_1 > Z_2, Y_3 > Z_2, Z_2 \le t\right\} = \int_0^t \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}\mathrm{d}G_1(u)$$

b) 如果温贮备设备在失效设备修好前失效且在该失效时刻运行设备依然运行, 则系统转移至 S_3, 然而由于 S_3 是非再生状态, 因此当系统进入 S_3 后会再次转移至哪些状态需要分别考虑.

c) 如果维修设备在运行设备失效前已修好, 则系统由 S_3 转移至 S_1, 此时有

$$Q_{11}^{(3)}(t) = P\left\{X_1 > Z_2, Y_3 < Z_2, Z_2 \le t\right\} = \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda u}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 u}\right)\mathrm{d}G_1(u)$$

d) 如果运行设备在失效设备修好前失效, 则系统将由 S_3 再次转移至 S_5, 此时有

$$Q_{15}^{(3)}(t)P\left\{Y_3 < X_1, X_1 < Z_2, X_1 \le t\right\} = \int_0^t \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 u}\right)\bar{G}_1(u)\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda u}\right) = \int_0^t \left(\lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u} * \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\bar{G}_1(u)\mathrm{d}u$$

e) 当系统转移至 S_5 后, 正在维修的设备修好后, 系统将转移至 S_7. 此时有

$$Q_{17}^{(3,5)}(t) = P\left\{Y_3 < X_1, X_1 < Z_2, Z_2 \le t\right\} = \int_0^t \left[\int_0^u \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1\sigma}\right)\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}\right)\right]\mathrm{d}G_1(u) = \int_0^t \left(\lambda_1 \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u} * \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} * 1\right)\mathrm{d}G_1(u)$$

当系统处于 S_1 时, 如果运行设备在维修设备修好前失效且在失效时刻温贮备设备没有失效, 则系统转移至 S_4. 由于 S_4 是非再生状态, 因此系统由 S_4 转移至哪些状态需要分别考虑.

f) 如果失效设备在运行设备失效前已修好, 则系统将由 S_4 转移至 S_2. 此时有

$$Q_{12}^{(4)}(t) = P\left\{X_1 < Y_3, X_1 + X_3 > Z_2, Z_2 \le t\right\} = \int_0^t \int_0^u \mathrm{e}^{-\lambda_1\sigma}\mathrm{e}^{-\lambda(u-\sigma)}\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}\right)\mathrm{d}G_1(u) = \int_0^t \left(\lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u} * \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\mathrm{d}G_1(u)$$

g) 反之, 如果运行设备在失效设备修好前失效, 则系统将由 S_4 转移至 S_6. 此时有

$$Q_{16}^{(4)}(t) = P\left\{X_1 < Y_3, X_1 + X_3 < Z_2, X_1 + X_3 \le t\right\} = \int_0^t \int_0^{t-u} \bar{G}(\sigma+u)\mathrm{e}^{-\lambda_1\sigma}\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}\right)\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\mu}\right) = \int_0^t \left(\lambda \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u} * \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\bar{G}_1(u)\mathrm{d}u$$

h) 当系统转移至 S_6 后, 正在维修的设备修好后, 系统将转移至 S_7. 此时有

$$Q_{17}^{(4,6)}(t)= P\{X_1<Y_3,\, X_1+X_3<Z_2,\, Z_2\le t\}=$$
$$\int_0^t\int_0^u\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda(u-\sigma)}\right)\mathrm{e}^{-\lambda_1\sigma}\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}\right)\mathrm{d}G_1(u)=$$
$$\int_0^t\left(\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}*1\right)\mathrm{d}G_1(u)$$

3) 当系统处于 S_2 时, 此时有下述几种情况:

a) 如果维修设备在运行设备和温贮备设备失效前已修好, 则系统转移至 S_0. 此时有

$$Q_{20}(t)=P\{Z_1<Y_3,\, Z_1<X_2,\, Z_1\le t\}=$$
$$\int_0^t\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}\mathrm{d}G(u)$$

b) 如果温贮备设备在维修设备修好前失效, 且在失效时刻运行设备正常运行, 则系统转移至 S_{10}, 由于 S_{10} 是非再生状态, 因此系统由 S_{10} 转移至哪些状态需要分别考虑.

c) 如果维修设备在运行设备失效前已修好, 则系统由 S_{10} 转移至 S_1. 此时有

$$Q_{21}^{(10)}(t)=P\{Y_3<Z_1,\, X_2<Z_1,\, Z_1\le t\}=$$
$$\int_0^t\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 u}\right)\mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}G(u)=$$
$$\int_0^t\left(\lambda_1\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\mathrm{d}G(u)$$

d) 反之, 如果运行设备在维修设备修好前失效, 则系统由 S_{10} 转移至 S_{11}. 此时有

$$Q_{2,11}^{(10)}(t)=P\{Y_3<X_1,\, X_2<Z_1,\, X_2\le t\}=$$
$$\int_0^t\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 u}\right)\bar{G}(u)\mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda u}\right)=$$
$$\int_0^t\left(\lambda_1\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\bar{G}(u)\mathrm{d}u$$

e) 当系统转移至 S_{11} 后, 维修设备修好后, 系统转移至 S_{12}. 此时有

$$Q_{2,12}^{(10,11)}(t)=P\{Y_3<X_1,\, X_2<Z_1,\, Z_1\le\}=$$
$$\int_0^t\int_0^u\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1\sigma}\right)\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}\right)\mathrm{d}G(u)=$$
$$\int_0^t\left(\lambda_1\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}*1\right)\mathrm{d}G(u)$$

当系统处于 S_2 时, 如果运行设备在维修设备修好前失效且在失效时刻温贮备设备没有失效, 则系统转移至 S_9. 由于 S_9 是非再生状态, 因此由 S_9 转移至哪些状态需要分别考虑.

f) 如果维修设备在运行设备失效前已修好, 则系统由 S_9 转移至 S_2. 此时有

$$Q_{22}^{(9)}(t)=P\{X_2<Y_3,\, X_2<Z_1,\, X_1+X_2>Z_1,$$
$$Z_1\le t\}=\int_0^t\int_0^u\mathrm{e}^{-\lambda_1\sigma}\mathrm{e}^{-\lambda(u-\sigma)}\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}\right)\mathrm{d}G(u)=$$
$$\int_0^t\left(\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\mathrm{d}G(u)$$

g) 如果运行设备在维修设备修好前失效, 则系统由 S_9 转移至 S_8. 系统处于 S_8 后, 维修设备修好后, 系统由 S_8 转移至 S_7. 此时有

$$Q_{2,7}^{(9,8)}(t)=P\{X_2<Y_3,\, X_2<Z_1,\, X_1+X_2<Z_1,$$
$$Z_1\le t\}=\int_0^t\int_0^u\mathrm{e}^{-\lambda_1\sigma}\times$$
$$\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda(u-\sigma)}\right)\mathrm{d}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda\sigma}\right)\mathrm{d}G(u)=$$
$$\int_0^t\left(\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)u}*\lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}*1\right)\mathrm{d}G(u)$$

4) 当系统处于 S_7 时, 此时有下述几种情况:

a) 如果正在维修的设备在运行设备失效前已修好, 则系统转移至 S_2. 此时有

$$Q_{72}(t)=P\{Z_1<X_2,\, Z_1\le t\}=\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}G(u)$$

b) 反之, 如果运行设备在维修设备修好前失效, 则系统转移至 S_6. 系统处于 S_6 后, 当维修设备修好后, 系统由 S_6 转移至 S_7. 此时有

$$Q_{77}^{(8)}(t)=P\{X_2<Z_1,\, Z_1\le t\}=$$
$$\int_0^t\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda u}\right)\mathrm{d}G(u)=$$
$$\int_0^t\left(\lambda\mathrm{e}^{-\lambda u}*1\right)\mathrm{d}G(u)$$

5) 当系统处于 S_{12} 时, 此时有下述几种情况:

a) 如果维修设备在运行设备失效前已修好, 则系统转移至 S_2, 此时有

$$Q_{12,2}(t)=P\{Z_3<X_1,\, Z_3\le t\}=\int_0^t\mathrm{e}^{-\lambda u}\mathrm{d}G_1(u)$$

b) 反之, 如果运行设备在维修设备修好前失效, 则系统转移至 S_6. 系统处于 S_6 后, 当维修设备修好后, 系统由 S_6 转移至 S_7. 此时有

$$Q_{12,7}^{(6)}(t) = P\{X_1 < Z_3,\, Z_3 \le t\} = \int_0^t \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda u}\right) \mathrm{d}G_1(u) = \int_0^t \left(\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u} * 1\right) \mathrm{d}G_1(u)$$

附录 B

对温贮备模型在所有再生状态的平均逗留时间进行分析如下.

1) 从系统进入 S_0 开始 ($t = 0$), 经过时间 t 后, 如果运行设备和温贮备设备均未失效, 则有

$$\mu_0 = \int_0^\infty t\mathrm{d}F_0(t) = \int_0^\infty P_0(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+2\lambda_1)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda + 2\lambda_1}$$

2) 从系统进入 S_1 开始 ($t = 0$), 经过时间 t 后, 如果运行设备和温贮备设备没有失效, 且正在维修的设备没有修好, 则有

$$\mu_1 = \int_0^\infty P_1(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty P\{X_1 > t,\, Z_2 > t,\, Y_3 > t\}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)t}\bar{G}_1(t)\mathrm{d}t = \frac{1 - g_1^*(\lambda + \lambda_1)}{\lambda + \lambda_1}$$

3) 从系统进入 S_2 开始 ($t = 0$), 经过时间 t 后, 如果运行设备和温贮备设备没有失效, 且正在维修的设备没有修好, 则有

$$\mu_2 = \int_0^\infty P_2(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty P\{Z_1 > t,\, X_2 > t,\, Y_3 > t\}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda_1)t}\bar{G}(t)\mathrm{d}t = \frac{1 - g^*(\lambda + \lambda_1)}{\lambda + \lambda_1}$$

4) 从系统进入 S_7 开始 ($t = 0$), 经过时间 t 后, 如果运行设备没有失效且正在维修的设备没有修好, 则有

$$\mu_7 = \int_0^\infty P_7(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty P\{Z_1 > t,\, X_2 > t\}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \bar{G}(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1 - g^*(\lambda)}{\lambda}$$

5) 从系统进入 S_{12} 开始 ($t = 0$), 经过时间 t 后, 如果运行设备没有失效且正在维修的设备没有修好, 则有

$$\mu_{12} = \int_0^\infty P_{12}(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty P\{X_1 > t,\, Z_3 > t\}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \bar{G}_1(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1 - g_1^*(\lambda)}{\lambda}$$

References

1 Kim H, Kim P. Reliability models for a nonrepairable system with heterogeneous components having a phase-type time-to-failure distribution. *Reliability Engineering and System Safety*, 2017, **159**: 37–46

2 Yin Dong-Liang, Hu Tao, Chen Tong, Xie Jing-Wei. Reliability analysis for warm standby redundancy system considering multiple asynchronous vacations of multiple maintenance stations. *Control and Decision*, 2020, **35**(4): 973–984
(尹东亮, 胡涛, 陈童, 谢经伟. 考虑多维修台异步多重休假的温贮备冗余系统可靠性模型. 控制与决策, 2020, **35**(4): 973–984)

3 Castellan S, Menis R, Tessarolo A, Luise F, Mazzuca T. A review of power electronics equipment for all-electric ship MVDC power systems. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 2018, **96**: 306–323

4 Roy A, Gupta N. Reliability of a coherent system equipped with two cold standby components. *Metrika*, 2020, **83**(6): 677–697

5 Zhai Q Q, Xing L D, Peng R, Yang J. Multi-valued decision diagram-based reliability analysis of k-out-of-n cold standby systems subject to scheduled backups. *IEEE Transactions on Reliability*, 2015, **64**(4): 1310–1324

6 Coppit D, Sullivan K J, Dugan J B. Formal semantics of models for computational engineering: A case study on dynamic fault trees. In: Proceedings of the 11th International Symposium on Software Reliability Engineering. ISSRE 2000. San Jose, USA: IEEE, 2000. 270–282

7 Levitin G, Xing L D, Dai Y S. Heterogeneous non-repairable warm standby systems with periodic inspections. *IEEE Transactions on Reliability*, 2016, **65**(1): 394–409

8 Peng R, Tannous O, Xing L D, Xie M. Reliability of smart grid systems with warm standby spares and imperfect coverage. In: Proceedings of the 1st International Conference on Smart Grids and Green IT Systems. Porto, Portugal: SciTePress, 2012. 61–66

9 Cruyt A L M, Ghobbar A A, Curran R. A value-based assessment method of the supportability for a new aircraft entering into service. *IEEE Transactions on Reliability*, 2014, **63**(4): 817–829

10 Zhao J B, Li Y K, Yang G F, Jiang K, Lin H R, Ade H, et al. Efficient organic solar cells processed from hydrocarbon solvents. *Nature Energy*, 2016, **1**(2): Article No. 15027

11 Elerath J, Pecht M. A highly accurate method for assessing reliability of redundant arrays of inexpensive disks (RAID). *IEEE Transactions on Computers*, 2009, **58**(3): 289–299

12 Hsieh C C, Hsieh Y C. Reliability and cost optimization in distributed computing systems. *Computers and Operations Research*, 2003, **30**(8): 1103–1119

13 Johnson B W, Julich P M. Fault tolerant computer system for the A129 helicopter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1985, **AES-21**(2): 220–229

14 Lu Ning-Yun, Chen Chuang, Jiang Bin, Xing Yin. Latest progress on maintenance strategy of complex system: From condition-based maintenance to predictive maintenance. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(1): 1–17
(陆宁云, 陈闯, 姜斌, 邢尹. 复杂系统维护策略最新研究进展: 从视情维护到预测性维护. 自动化学报, 2021, **47**(1): 1–17)

15 Yuan Ye, Zhang Yong, Ding Han. Research on key technology of industrial artificial intelligence and its application in predictive maintenance. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(10): 2013–2030
(袁烨, 张永, 丁汉. 工业人工智能的关键技术及其在预测性维护中

的应用现状. 自动化学报, 2020, **46**(10): 2013−2030)

16 Chen Y, Wang Z, Li Y Y, Kang R, Mosleh A. Reliability analysis of a cold-standby system considering the development stages and accumulations of failure mechanisms. *Reliability Engineering and System Safety*, 2018, **180**: 1−12

17 Zhong C Q, Jin H B. A novel optimal preventive maintenance policy for a cold standby system based on semi-Markov theory. *European Journal of Operational Research*, 2014, **232**(2): 405−411

18 Wang J Y, Ye J M. A new repair model and its optimization for cold standby system. *Operational Research*, 2022, **22**(1): 105−122

19 Chen Tong, Xie Jing-Wei, Di Peng, Yin Dong-Liang. Reliability analysis of multi-state cold standby system with two competing failures. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2019, **40**(3): 110−125
(陈童, 谢经伟, 狄鹏, 尹东亮. 考虑两种失效竞争的多状态冷贮备系统可靠性模型. 航空学报, 2019, **40**(3): 110−125)

20 Cao Jin-Hua, Cheng Kan. Reliability analysis of two-unit standby system. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 1980, **3**(2): 147−160
(曹晋华, 程侃. 两部件热贮备系统的可靠性分析. 应用数学学报, 1980, **3**(2): 147−160)

21 Patowary M, Panda G, Deka B C. Reliability modeling of microgrid system using hybrid methods in hot standby mode. *IEEE Systems Journal*, 2019, **13**(3): 3111−3119

22 Huang W, Loman J, Song T. A reliability model of a warm standby configuration with two identical sets of units. *Reliability Engineering & System Safety*, 2015, **133**: 237−245

23 Ma X Y, Liu B, Yang L, Peng R, Zhang X D. Reliability analysis and condition-based maintenance optimization for a warm standby cooling system. *Reliability Engineering and System Safety*, 2020, **193**: Article No. 106588

24 Yin Dong-Liang, Hu Tao, Chen Tong. Reliability analysis for multi-state warm standby system with repair priority. *Control and Decision*, 2018, **33**(11): 2029−2036
(尹东亮, 胡涛, 陈童. 考虑维修优先权的多状态温贮备系统可靠性模型. 控制与决策, 2018, **33**(11): 2029−2036)

25 Liu Bao-Liang, Wen Yan-Qing, Feng Yue-Jiao. Reliability for warm standby repairable system with unreliable server and switching failure. *Operations Research and Management Science*, 2018, **27**(10): 113−117
(刘宝亮, 温艳清, 丰月姣. 修理设备和开关不完全可靠的温贮备可修系统的可靠性. 运筹与管理, 2018, **27**(10): 113−117)

26 Kuo C C, Ke J C. Comparative analysis of standby systems with unreliable server and switching failure. *Reliability Engineering and System Safety*, 2016, **145**: 74−82

27 Guo L, Gui W H. Statistical inference of the reliability for generalized exponential distribution under progressive type-II censoring schemes. *IEEE Transactions on Reliability*, 2018, **67**(2): 470−480

28 Wang K H, Liu Y C, Pearn W L. Cost benefit analysis of series systems with warm standby components and general repair time. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2005, **61**(2): 329−343

金海波 辽宁工程技术大学软件学院副教授. 2014 年获大连理工大学博士学位. 主要研究方向为复杂系统可靠性分析, 异常检测, 优化维护维修策略制定. 本文通信作者.
E-mail: jinhaibo@lntu.edu.cn
(**JIN Hai-Bo** Associate professor at the School of Software, Liaoning Technical University. He received his Ph.D. degree from Dalian University of Technology in 2014. His research interest covers reliability analysis for complex systems, anomaly detection, optimal maintenance, and repair strategy making. Corresponding author of this paper.)

赵欣越 辽宁工程技术大学软件学院硕士研究生. 主要研究方向为智能信息处理, 贮备系统可靠性分析, 基于机器学习技术的网络安全防护.
E-mail: zhaoxy1201@163.com
(**ZHAO Xin-Yue** Master student at the School of Software, Liaoning Technical University. Her research interest covers intelligent information processing, reliability analysis of standby systems, and network security protection based on machine learning technology.)

桑 雨 辽宁工程技术大学电子与信息工程学院副教授. 2012 年获大连理工大学博士学位. 主要研究方向为人工智能与计算机视觉.
E-mail: sangyu2008bj@sina.com
(**SANG Yu** Associate professor at the School of Electronics and Information Engineering, Liaoning Technical University. He received his Ph.D. degree from Dalian University of Technology in 2012. His research interest covers artificial intelligent and computer vision.)