

二项分布下 VSI EWMA 控制图的经济设计

薛 丽^{1,2}, 何 桢¹

(1. 天津大学管理与经济学部, 天津 300072;

2. 郑州航空工业管理学院管理工程学院, 河南 郑州 450046)

摘要: 为了降低过程控制成本, 同时提高监控不合格品数的效率, 研究二项分布下可变抽样区间(VSI)指数加权移动平均(EWMA)控制图的经济设计问题. 首先基于质量损失函数和预防维修策略, 构建 VSI 二项 EWMA 控制图的联合经济模型; 其次以期望损失函数最小为目标, 运用遗传算法确定控制图设计参数的最优值; 然后对所建立的联合经济模型进行灵敏度分析, 得出期望损失函数随着单元抽样费用、过程波动和产品不合格时的损失的增大而增大. 通过最优性分析得出基于联合经济模型设计的 VSI 二项 EWMA 控制图具有较小的单位时间期望损失成本, 优于统计方法设计的 VSI 二项 EWMA 控制图.

关键词: 可变抽样区间; EWMA 控制图; 经济设计; 质量损失函数; 预防维修

中图分类号: O213.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-5781(2020)05-0711-10

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2020.05.012

Economic design of variable sampling intervals EWMA control chart under binomial distributions

Xue Li^{1,2}, He Zhen¹

(1. College of Management and Economics, Tianjin University, Tianjin 300072, China;

2. School of Management Engineering, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450046, China)

Abstract: To reduce the costs for process control and improve the efficiency of monitoring unqualified products, the economic design of exponential weighted moving average (EWMA) control chart with variable sampling intervals (VSI) for monitoring binomial distribution is discussed in this paper. Firstly, an integrated economic model of VSI EWMA control chart based on the quality loss function and preventive maintenance is developed. Secondly, the optimal values of the parameters are determined such that the expected loss function is minimized, and genetic algorithms are used to search for the optimal values of the parameters. Further, sensitivity analysis is presented to illustrate the model, and the result shows that the fixed cost per sample, process shift and loss caused by nonconforming product significantly and positively affect the expected loss function. Finally, through a comparative study, it is concluded that the VSI EWMA control chart designed by the joint economic decision model has less unit time expected loss, and is superior to VSI EWMA control chart designed by traditional methods.

Key words: VSI; EWMA control chart; economic design; quality loss functions; preventive maintenance

收稿日期: 2018-12-14; 修订日期: 2019-11-14.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71701188; U1204702; 71661147003; 71672209; 71871204); 河南省高校科技创新人才支持计划资助项目(19HASTIT032); 航空科学基金资助项目(2016ZG55021); 中国博士后科学基金资助项目(2016M601266); 河南省科技攻关计划资助项目(202102310638).

1 引言

随着现代生产过程中制造技术的发展以及各种在线传感器的广泛应用,大量过程数据的在线监控越来越具有广阔的应用前景和现实意义.由于5M1E因素的影响,产品的生产制造过程会产生质量波动.统计过程控制的重要工具——控制图可以监控过程、有效的减少制造过程的质量波动.为了对产品不合格品数的波动进行监控,休哈特提出过程服从二项分布的np控制图.由于np控制图仅用了当前样本点信息,通常能较快地监控过程中的较大波动,而对过程中的较小波动效果不明显. Roberts^[1]于1959年提出的EWMA控制图,以指数形式叠加放大过程中的小波动,因此与传统的休哈特控制图相比,它监控小波动的效果较好.

1988年Reynolds等^[2]对均值控制图进行可变抽样区间设计,使得生产过程的监控从设计参数固定的静态控制,进入到了设计参数可变的动态控制.随后,愈来愈多的学者研究了设计参数变化的动态控制图^[3-5].为了能更快地监测出生产过程中产品不合格品数的较小波动,薛丽^[6]提出可变抽样区间的二项EWMA控制图,得出VSI二项控制图能较快地发现过程中的波动,比静态控制图优越.设计理论为,如果第 t 个样本点落在控制域内并且比较靠近控制限,为了快速发现过程中的潜在波动,用短的抽样区间抽取第 $t+1$ 个样本,如果第 t 个样本点距离中心限比较近,用长的抽样区间抽取第 $t+1$ 个样本以减少不必要的抽样费用.

根据评价控制图指标不同,控制图的设计包括统计设计和经济设计.统计设计主要是基于控制图的统计标准^[7-9].虽然它考虑了控制图的统计特性,但没有考虑控制图的经济效益.为了减小控制图对产品制造过程监控产生的损失,Duncan^[10]于1956年首次提出控制图的经济设计.他考虑在生产过程中抽样、检修、返修等成本建立了一个费用模型,使其最小化确定控制图的参数.1986年,Lorenzen等^[11]提出统一的控制图经济模型,他们所提出的经济模型能应用于各种静态控制图.随后,许多学者对控制图的经济设计进行了研究^[12-17].其中张伟鹏等^[18]通过贝叶斯方法利用样本信息对过程信息进行更新,对面向小批量生产过程的贝叶斯控制图进行经济设计.Patil等^[19]对可变抽样区间符号控制图进行经济设计.Farnoosh等^[20]对双抽样间隔的多元贝叶斯控制图进行经济设计.由于动态控制图优于静态控制图,提高了过程控制的监控效率,所以其经济性的研究显得尤为重要.

由于在产品生产过程中,机器化和自动化的持续增加,生产流程也从传统的人工转变到大规模机器时代.因此,在生产数量、产品质量以及生产成本方面,设备状态具有重要的作用.尽管工业和学术界早就认为产品过程质量和设备维修之间存在紧密的联系^[21],但近年来许多学者才开始关注过程质量控制和设备维修管理二者整合的研究^[22-26].其中针对统计过程控制、预防维修和生产决策的集成问题,Xiang^[27]针对离散的马尔科夫链,研究了一种统计过程控制和预防性维护的集成模型.Salmasnia等^[28]为了将系统的可靠性维持在可接受的水平,采用非均匀抽样对生产周期长度、维修策略和控制图经济设计三者的整合模型进行研究.针对非参数分布问题,Khrucasom等^[29]对EWMA控制图、Kolmogorov-Smirnov控制图和预防维修策略的整合模型进行研究,用遗传算法求出参数的最优值.以上关于预防维修策略和控制图的研究表明,二者整合研究可以有效地提高单个措施对生产过程的监控效果和系统效能.

另一方面,质量损失函数关注质量输出偏离目标值的损失,在工业生产中得到广泛应用,而传统的经济设计方法并没有考虑这部分损失.因此,为了提高过程监控效率的同时降低过程控制成本,本文针对产品不合格品数服从二项分布的情形下,将预防维修和VSI EWMA控制图进行联合经济设计,建立基于质量损失函数和预防维修的VSI二项EWMA控制图经济模型.通过对经济模型进行灵敏度分析得出模型参数与设计参数的影响关系,以指导控制图的参数选择.

2 可变抽样区间二项EWMA控制图

假设某一产品的不合格品率记为 $p \in (0, 1)$,该产品的生产数量无限大.记 N 为随机抽取的一个样本,

样本容量为 n , 则 N 中不合格品数为 x 的概率为

$$\Pr(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad (1)$$

则 X 的均值和方差为

$$E[X] = np, \quad (2)$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p). \quad (3)$$

对上述过程运用 EWMA 控制图监控, 定义监控不合格品率的二项分布 EWMA 统计量如下

$$Z_0 = np, \quad (4)$$

$$Z_t = \lambda X_t + (1-\lambda)Z_{t-1}, \quad (5)$$

其中 λ 为平滑系数, $0 < \lambda < 1$, t 为控制图上的描点个数.

根据式(2)和式(3)可得

$$E[Z_t] = np, \quad (6)$$

$$\text{Var}(Z_t) = \frac{\lambda}{2-\lambda} (1 - (1-\lambda)^{2t}) np(1-p). \quad (7)$$

由于 $0 < \lambda < 1$, 当 $t \rightarrow \infty$, $(1-\lambda)^{2t} \rightarrow 0$, 因此得到 $\text{Var}(Z_t)$ 的近似形式如下

$$\text{Var}(Z_t) = \frac{\lambda}{2-\lambda} np(1-p). \quad (8)$$

令 k_1 为上控制线系数, w_1 为上警戒线系数, $0 < w_1 < k_1$; k_2 为下控制线系数, w_2 为下警戒线系数, $0 < w_2 < k_2$. VSI 二项 EWMA 控制图的控制限 UCL, LCL, 警戒线 UWL, LWL 和中心线 CL 分别为

$$\text{UCL} = np + k_1 \sigma_{Z_t}, \quad (9)$$

$$\text{UWL} = np + w_1 \sigma_{Z_t}, \quad (10)$$

$$\text{CL} = np, \quad (11)$$

$$\text{LWL} = np - w_2 \sigma_{Z_t}, \quad (12)$$

$$\text{LCL} = np - k_2 \sigma_{Z_t}, \quad (13)$$

其中 $\sigma_{Z_t} = \sqrt{\lambda np(1-p)/(2-\lambda)}$.

记中心域为 $[\text{LWL}, \text{UWL}]$, 警戒域为 $[\text{UWL}, \text{UCL}] \cup [\text{LCL}, \text{LWL}]$. h_1 和 h_2 为抽样区间, 且 $h_1 > h_2 > 0$. 如果样本点 $Z_t \in [\text{LWL}, \text{UWL}]$, 则等待 h_1 抽取 X_{t+1} , 即第 $t+1$ 个样本采取较长的抽样区间 h_1 ; 如果样本点 $Z_t \in [\text{UWL}, \text{UCL}] \cup [\text{LCL}, \text{LWL}]$, 则等待 h_2 抽取 X_{t+1} , 即第 $t+1$ 个样本采取较短的抽样区间 h_2 ; 当 $Z_t > \text{UWL}$ 或 $Z_t < \text{LWL}$ 时, 控制图报警.

3 建立联合经济模型

假设以下条件成立:

- 1) 质量特性值服从样本容量为 n , 总体不合格品率为 p 的二项分布.
- 2) 开始时, 过程受控即 $p = p_0$.
- 3) 若异常原因发生, 总体不合格品率变化到 $p = p_1 = \delta p_0$.

- 4) 过程处于受控状态的时间服从指数分布(参数为 θ).
- 5) 异常原因在抽样时不发生, 且在整个周期仅发生一次.
- 6) 发生异因后, 该过程很快改变, 且不会自动恢复到开始状态.
- 7) 当样本点落入警戒域时, 立即对过程采取预防维修策略.

3.1 计算过程周期时间 T

将过程从开始受控到有异常原因出现, 查找并消除异因的阶段定义为过程周期时间 T , 可以分为受控阶段、从出现异常原因到控制图报警的时间、找到异因和修复过程的阶段、抽取样本和在控制图上作图所需的时间, 即

$$T = 1/\theta + (1 - \gamma_1)st_0/\text{ANSS}_0 + \text{ATS}_1 - \tau + ng + t_1 + t_2, \quad (14)$$

其中 $1/\theta + (1 - \gamma_1)st_0/\text{ANSS}_0$ 为受控阶段的平均时间. t_0 为控制图发生虚发警报时, 寻找每个虚发警报发生原因的平均时间; ANSS_0 为过程处于受控状态时, 从开始到控制图报警所抽取的平均样本数, s 过程处于受控状态时, 平均抽取样本个数, 且 $s = e^{-\theta h_0}/(1 - e^{-\theta h_0}) \approx 1/(\theta h_0)^{[12]}$; 若寻找异常原因时生产继续, $\gamma_1 = 1$; 若寻找异常原因时生产停止, $\gamma_1 = 0$; h_0 为平均抽样区间, $h_0 = \text{ATS}_0/\text{ANSS}_0$, ATS_0 为 VSI 二项 EWMA 控制图在过程受控时的平均报警时间. $\text{ATS}_1 - \tau$ 为从出现异常原因到控制图报警的平均时间. τ 为过程处于受控状态时, 异常原因发生在两个样本之间的平均时间, 且 $\tau = \frac{1 - (1 + \theta h_0)e^{-\theta h_0}}{\theta(1 - e^{-\theta h_0})} \approx \frac{h_0}{2} - \frac{1}{12}\theta h_0^2$ [12], ATS_1 为 VSI 二项 EWMA 控制图在过程失控时的平均报警时间; ng 为抽取样本和作图的时间. n 为样本大小, g 为抽取一次样本和作图的时间平均值, $t_1 + t_2$ 为寻找异因和修复过程的时间. t_1 为找到异因所需时间的平均值; t_2 为修复过程所需时间的平均值.

关于 ATS_0 , ATS_1 和 ANSS_0 的计算公式, 说明如下, 将控制图的受控区域 $[\text{LCL}, \text{UCL}]$ 分成 $2m + 1$ 个长度相等的小区间, 记第 j 个子区间为 (L_j, U_j) , 定义它为状态 E_j , 运用马尔科夫链方法得^[6]

$$\text{ATS}_0 = \sum_{j=1}^{2m+1} q_{k_0, i} b_i, \quad (15)$$

其中 k_0 表示中心线处于状态 E_{k_0} , 即过程在开始时处于第 k_0 个状态.

当 E_j 落在 $[\text{LWL}, \text{UWL}]$ 内, $b_j = h_1$; 当 E_j 落在 $[\text{LCL}, \text{LWL}] \cup [\text{UWL}, \text{UCL}]$ 内, $b_j = h_2$. 令

$$\mathbf{Q} = [q_{ij}]_{(2m+1)(2m+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{P})^{-1}, \quad (16)$$

$$\mathbf{P} = [p_{ij}]_{(2m+1)(2m+1)}, \quad (17)$$

其中 $p_{ij} = \Pr(A < X_t < B)$,

$$A = np - k_2 \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} np(1 - p)} + \frac{((2j - 1) - (1 - \lambda)(2i - 1))}{2(2m + 1)\lambda} (k_1 + k_2) \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} np(1 - p)},$$

$$B = np - k_2 \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} np(1 - p)} + \frac{(2j - (1 - \lambda)(2i - 1))}{2(2m + 1)\lambda} (k_1 + k_2) \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} np(1 - p)},$$

$$\Pr(X_t = x) = C_n^x p_0^x (1 - p_0)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad 0 < p_0 < 1.$$

同理有

$$\text{ATS}_1 = \sum_{i=1}^{2m+1} q_{k_0, i}^* b_i, \quad (18)$$

令 $\mathbf{Q}^* = [q_{ij}^*]_{(2m+1)(2m+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)^{-1}$, $\mathbf{P}^* = [p_{ij}^*]_{(2m+1)(2m+1)}$, 其中 $p_{ij}^* = \Pr(A < X_t < B)$, A 和 B 同上, $\Pr(X_t = x) = C_n^x p_1^x (1 - p_1)^{n-x}$, $x = 0, 1, \dots, n$, $0 < p_1 < 1$.

同理, $ANSS_0 = \sum_{j=1}^{2m+1} q_{k_0, i} b_i$, 其中 q_{ij} 的同 ATS_0 中的 q_{ij} .

3.2 确定损失函数 L

在一个过程周期时间内, 考虑的损失成本涉及到以下几部分: 1) 抽取样本、作图、发现异因、修复过程以及虚发警报的损失成本 L_1 ; 2) 进行预防维修产生的成本 L_2 ; 3) 过程处于受控状态时产生的损失成本 L_3 ; 4) 异常原因导致过程处于失控状态的损失成本 L_4 .

1) 令 a 为每个样本产生的费用, b 为抽取每个单元的费用, d 为发生每次虚发警报的成本平均值, W 为发现一次异因及修复它的平均成本, 当纠正过程时生产继续, $\gamma_2 = 1$, 当纠正过程时生产停止, $\gamma_2 = 0$.

$$L_1 = \frac{d}{ANSS_0} \frac{1/\theta + (1 - \gamma_1)st_0/ANSS_0}{h_0} + W + (a + bn) \times ((1/\theta + (1 - \gamma_1)st_0/ANSS_0)/h_0 + (ATS_1 - \tau + ng + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2)/\bar{h}_0),$$

其中 \bar{h}_0 为异常原因导致过程处于失控状态时的平均抽样区间, $\bar{h}_0 = ATS_1/ANSS_1$.

2) 假设进行一次预防维修产生的损失成本为 C_{pm} , 则

$$L_2 = C_{pm} (p_{01} (1/\theta + (1 - \gamma_1)st_0/ANSS_0)/h_0 + p_{11} (ATS_1 - \tau + ng + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2)/\bar{h}_0),$$

其中 $p_{00} = \Pr(LWL \leq Z_t \leq UWL|p = p_0)$, $p_{01} = \Pr(UWL < Z_t < UCL \text{ 或 } LCL < Z_t < LWL|p = p_0)$,

$$p_{10} = \Pr(LWL \leq Z_t \leq UWL|p = p_1), p_{11} = \Pr(UWL < Z_t < UCL \text{ 或 } LCL < Z_t < LWL|p = p_1).$$

3) 令目标值为 m , 容差为 Δ , 则 $m \pm \Delta$ 为产品质量特性值的上下规范限; 假设不合格品造成的损失为 M , 则 M/Δ^2 为损失函数的系数. 过程受控时, 目标值与均值的偏差 $\eta = |\mu - m|$, 过程标准差记为 σ , 单位时间内生产的产品数量记为 y , 则

$$L_3 = M(np_0(1 - p_0) + \eta^2)(1/\theta + (1 - \gamma_1)st_0/ANSS_0)y/\Delta^2.$$

4) 过程失控时的社会损失期望值

$$L_4 = M(np_0(1 - p_0) + (np_1 - np_0 + \eta)^2)(ATS_1 - \tau + t_1 + t_2 + ng)y/\Delta^2.$$

根据式(15), 式(16), 式(17)和式(18), 可得损失函数为

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4,$$

期望损失函数为

$$ETL = L/T. \quad (19)$$

综上 ETL 是关于 8 个参数($n, k_1, k_2, h_1, h_2, w_1, w_2, \lambda$) 的期望损失函数, 可以令 ETL 达到最小以确定($n, k_1, k_2, h_1, h_2, w_1, w_2, \lambda$) 的最优值.

4 数据案例

一化工建材有限公司主要生产航空玻璃纤维布. 为了提高生产质量, 现在对一批航空玻璃纤维布上的瑕疵点数进行监控, 并且已知该瑕疵点数服从参数为 P 的二项分布, 过程受控时 $P = P_0 = 0.1$, 过程失控时 $P = P_1 = \delta P_0 = 0.15$, 这一生产过程可用 VSI 二项 EWMA 均值控制图来监控. 模型参数和成本参数为 $a = 1.2 \text{ USD}$, $b = 0.2 \text{ USD}$, $\Delta = 4$, $W = 4 \text{ USD}$, $d = 3 \text{ USD}$, $m = 4$, $g = 0.2 \text{ h}$, $t_1 = 0.8 \text{ h}$, $t_2 = 0.8 \text{ h}$, $\theta = 0.01$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $y = 10$, $C_{pm} = 10 \text{ USD}$, $M = 10 \text{ USD}$.

在 MATLAB 环境下编码遗传算法. 所求控制图 8 个参数($n, k_1, k_2, h_1, h_2, w_1, w_2, \lambda$)中, 要求 n 为整

数, $h_1, h_2, k_1, k_2, w_1, w_2$ 和 λ 为连续值. 每个参数的取值范围为 $20 \leq n \leq 50, 1 \leq k_1 \leq 4, 1 \leq k_2 \leq 4, 1 \leq h_1 \leq 3, 0.01 \leq h_2 \leq 1, 0.01 \leq w_1 \leq 3, 0.01 \leq w_2 \leq 3, w_1 \leq k_1, w_2 \leq k_2, 0.01 \leq \lambda \leq 1$. 种群规模 N 为 50; 交叉率为 0.8; 变异率为 0.1; 运行代数为 100; 适应度函数为损失成本函数 ETL 的倒数. 当遗传算法运行到 100 代时停止, 得到 VSI 二项 EWMA 控制图的参数最优值, $n = 21, k_1 = 1.615, k_2 = 1.261, h_1 = 2.192, h_2 = 0.144, w_1 = 1.025, w_2 = 1.206, \lambda = 0.25, ETL = 47.658 1$.

5 参数灵敏度分析

为了研究经济模型参数 $(a, b, \theta, d, g, t_1, t_2, \delta, C_{pm}, W, M)$ 对设计参数 $(n, h_1, h_2, k_1, k_2, w_1, w_2, \lambda)$ 和期望损失函数 ETL 的影响, 运用回归分析对 VSI 二项 EWMA 控制图的联合经济模型进行参数灵敏度分析.

表 1 记录模型参数对应的两个水平. 根据正交表 $L_{16}(2^{15})$ 进行试验, 用遗传算法求出每次试验的参数最优解.

表 1 十一个模型参数的两种水平
Table 1 Two levels of eleven model parameters

模型参数	水平1	水平2
a	1	4
b	0.1	1
θ	0.01	0.05
d	5	10
g	0.1	0.5
t_1	2	7
t_2	2	7
δ	1.2	2
C_{pm}	8	16
W	2	8
M	5	10

固定 $\gamma_1 = \gamma_2 = 1, t_0 = 1$, 根据正交表 $L_{16}(2^{15})$ 所选取的 16 次试验如表 2, 每次试验得出的结果分别记录在表 3.

表 2 根据 $L_{16}(2^{15})$ 安排的十六次试验
Table 2 Sixteen tests arranged according to $L_{16}(2^{15})$

试验号	模型参数										
	a	b	θ	d	W	g	t_1	t_2	δ	C_{pm}	M
1	1	0.1	0.01	5	2	0.1	2	2	1.2	8	5
2	1	0.1	0.01	5	2	0.1	2	7	2.0	16	10
3	1	0.1	0.01	10	8	0.5	7	2	1.2	8	5
4	1	0.1	0.01	10	8	0.5	7	7	2.0	16	10
5	1	1.0	0.05	5	2	0.5	7	2	1.2	16	10
6	1	1.0	0.05	5	2	0.5	7	7	2.0	8	5
7	1	1.0	0.05	10	8	0.1	2	2	1.2	16	10
8	1	1.0	0.05	10	8	0.1	2	7	2.0	8	5
9	4	0.1	0.05	5	8	0.1	7	2	2.0	8	10
10	4	0.1	0.05	5	8	0.1	7	7	1.2	16	5
11	4	0.1	0.05	10	2	0.5	2	2	2.0	8	10
12	4	0.1	0.05	10	2	0.5	2	7	1.2	16	5
13	4	1.0	0.01	5	8	0.5	2	2	2.0	16	5
14	4	1.0	0.01	5	8	0.5	2	7	1.2	8	10
15	4	1.0	0.01	10	2	0.1	7	2	2.0	16	5
16	4	1.0	0.01	10	2	0.1	7	7	1.2	8	10

令显著性水平 $\alpha = 0.1$, 对期望损失或控制图经济模型的设计参数进行回归分析, 得出结论:

1) 过程波动 δ , 发生每次虚发警报的平均成本 d , 抽取一次样本和作图的时间平均值 g 和不合格品造成的损失 M 对样本容量 n 的取值起作用, 且 δ, d 和 M 越大, 样本容量 n 越大; g 越大, 样本容量 n 越小.

2) 过程波动 δ , 发生每次虚发警报的平均成本 d 和抽取一次样本和作图的时间平均值 g 对上控制线系数 k_1 的取值起作用, 且 δ 和 g 越大, 控制线系数 k_1 越大; d 越大, 控制线系数 k_1 越小.

表 3 每次试验的结果
Table 3 The results of each trial

试验号	结果								
	n	k_1	k_2	h_1	h_2	w_1	w_2	λ	ETL
1	21	1.225	2.767	2.498	0.521	0.660	1.629	0.425	27.834
2	26	2.051	1.289	1.000	0.010	1.587	1.261	0.010	139.155
3	21	1.054	2.023	3.000	0.847	0.454	1.798	0.240	27.992
4	25	2.707	1.359	1.019	0.456	2.312	1.321	0.010	160.744
5	21	1.247	1.750	3.000	0.108	0.828	1.373	0.366	61.354
6	21	3.974	1.523	3.000	0.997	2.997	1.484	0.010	91.341
7	21	1.245	2.053	3.000	0.723	0.884	1.057	0.416	61.216
8	26	1.991	1.466	3.000	0.011	1.214	1.438	0.010	89.080
9	25	2.445	1.085	1.000	0.010	1.270	1.067	0.012	141.061
10	21	1.273	1.800	3.000	0.527	0.932	1.045	0.404	28.014
11	25	2.655	1.495	1.000	0.018	1.890	1.458	0.010	150.416
12	22	1.607	1.566	3.000	0.313	1.227	1.070	0.725	28.458
13	20	3.974	1.257	3.000	0.999	2.996	0.758	0.942	87.097
14	21	1.923	1.284	3.000	0.837	1.428	0.733	0.774	61.488
15	25	2.541	1.843	2.646	0.656	2.250	1.844	0.011	90.173
16	21	1.851	1.390	2.999	0.924	1.093	0.878	0.799	61.160

3) 每个样本产生的费用 a , 过程波动 δ , 修复过程所需时间的平均值 t_2 和不合格品造成的损失 M 对下控制限系数 k_2 起作用, 且下控制限系数 k_2 随着他们的增加而减小.

4) 抽取每个单元的费用 b , 异常原因发生的频率 θ , 抽取一次样本和作图的时间平均值 g , 发现一个异因及修复它的平均成本 W , 过程波动 δ 和不合格品造成的损失 M 对长抽样区间 h_1 起作用, 且 b, θ, g 和 W 越大, 长抽样区间 h_1 越大; δ 和 M 越小, 长抽样区间 h_1 越小.

5) 短抽样区间 h_2 为独立变量.

6) 过程波动 δ 和抽取一次样本和作图的时间平均值 g 对上警戒线系数 w_1 的取值起作用, 且上警戒线系数 w_1 随着它们的增大而增大.

7) 每个样本产生的费用 a , 异常原因发生的频率 θ , 发现一个异因及修复它的平均成本 W , 抽取一次样本和作图的时间平均值 g , 进行一次预防维修产生的损失成本 C_{pm} , 发生每次虚发警报的平均成本 d 和找到异因所需时间的平均值 t_1 对下警戒线系数 w_2 的取值起作用, 且 a, θ, W, g 和 C_{pm} 越大, 下警戒线系数 w_2 越大, d 和 t_1 越大, w_2 越小.

8) 每个样本产生的费用 a , 发现一个异因及修复它的平均成本 W , 抽取一次样本和作图的时间平均值 g , 进行一次预防维修产生的损失成本 C_{pm} , 发生每次虚发警报的平均成本 d , 找到异因所需时间的平均值 t_1 , 过程波动 δ 和不合格品造成的损失 M 对平滑系数 λ 的取值起作用, 且 a, W, g, C_{pm} 越大, 平滑系数 λ 越大; d, t_1, δ 和 M 越大, 平滑系数 λ 越小.

9) 抽取每个单元的费用 b , 过程波动 δ 和不合格品造成的损失 M 对期望损失函数 ETL 的取值起作用, 期望损失函数 ETL 随着它们增大而增大.

6 最优性分析

用 VSI EWMA 控制图对某一产品的不合格品率进行监控, 已知总体服从二项分布, 不合格品率为 P . 过程稳定时, $P = P_0 = 0.1$, 过程产生波动时, $P = P_1 \neq 0.1$. 通过对固定 $n = 30$, 以平均报警时间 ATS 为

评价准则设计的 VSI EWMA 控制图和根据以式(19)为优化函数的联合经济模型设计的 VSI EWMA 控制图进行比较,验证经济模型的最优性.

经济模型参数 $(a, b, \theta, d, g, t_1, t_2, \delta, C_{pm}, W, M)$ 的取值见表 1, 以方法 1) 设计的控制图期望损失记为 ETL_1 , 以方法 2) 设计的控制图期望损失记为 ETL . 固定 $n = 30, w_1 = w_2 = 2, h_1 = 1.5, h_2 = 0.6$, 分别计算 $\lambda = 0.1, ATS = 300, 400, 500$ 和 $\lambda = 0.2, ATS = 400, 500, 600$ 时, 16 次正交试验所对应的期望损失, 并记录在表 4.

表 4 最优性分析结果
Table 4 Optimality analysis results

试验号	ETL	ETL ₁ ($\lambda = 0.1$)			ETL ₁ ($\lambda = 0.2$)		
		ATS=300	ATS=400	ATS=500	ATS=400	ATS=500	ATS=600
1	27.834	66.002 5	64.039 0	62.786 3	62.813 0	61.610 6	60.858 7
2	139.155	859.506 4	914.817 7	925.835 0	1 460.500 0	1 493.200 0	1 539.500 0
3	27.992	66.145 6	64.139 1	62.860 1	62.899 8	61.675 7	60.908 8
4	160.744	1 034.700 0	1038.8 0	1 042.400 0	1 671.300 0	1682.10	1 698.600 0
5	61.354	150.979 9	142.296 8	136.691 5	138.472 4	132.926 4	129.447 5
6	91.341	549.438 3	543.513 8	523.479 4	838.274 4	858.012 7	850.609 4
7	61.216	150.889 0	142.259 7	136.681 9	138.454 1	132.924 8	129.453 7
8	89.080	480.814 2	481.229 0	482.874 1	753.115 8	764.114 2	780.551 2
9	141.061	898.024 9	914.538 0	925.469 6	1 460.400 0	1 494.500 0	1 539.500 0
10	28.014	65.137 0	65.065 6	63.767 3	63.557 0	62.104 0	60.729 6
11	150.416	971.925 1	981.098 9	987.564 7	1 574.600 0	1 594.800 0	1 623.000 0
12	28.458	67.415 0	65.026 4	63.731 2	63.517 1	62.069 6	60.703 3
13	87.097	519.066 3	515.427 9	514.923 2	811.098 7	814.681 1	823.693 7
14	61.488	149.710 5	141.409 4	136.788 8	138.176 0	132.532 5	127.056 4
15	90.173	481.585 4	481.508 6	483.239 5	753.291 7	764.032 0	781.544 5
16	61.160	149.585 4	141.319 3	136.716 6	138.093 9	132.472 7	127.017 4
平均值	81.661 4	416.289 7	418.530 6	417.863 1	633.035 1	640.432 8	649.573 4
标准化	1	5.097 8	5.125 2	5.117 0	7.752 0	7.842 5	7.954 5

从表 4 可以看出, 对于每一次试验, ETL 的值均小于 ETL_1 , 例如第 2 次试验, 联合经济模型设计的 VSI EWMA 控制图对应的期望损失函数 ETL 值为 139.115, 而以平均报警时间 ATS 为评价准则设计的 VSI EWMA 控制图对应的 ETL_1 , 在 $\lambda = 0.1, ATS = 300, 400, 500$ 和 $\lambda = 0.2, ATS = 400, 500, 600$ 这几种情况下, 均大于 ETL. 分别计算 16 次试验 ETL 和 ETL_1 的平均值记录在表格上, 得到 ETL 的平均值为 81.661 4, 远远小于几种情况下 ETL_1 的均值. 比如, 当 $\lambda = 0.1, ATS = 400$ 时, ETL_1 的值为 418.530 6 远远大于 ETL 的值. 也即是在每次试验下, 联合经济模型设计的 VSI EWMA 控制图均优于平均报警时间 ATS 为评价准则设计的 VSI EWMA 控制图.

在表格的最后一行记录两种控制图的平均值标准化的数值, 即除以 ETL 的均值 81.661 4. 可以得出 $\lambda = 0.1, ATS = 300, 400, 500$ 和 $\lambda = 0.2, ATS = 400, 500, 600$ 时, ETL_1 对应于 ETL 的倍数. 比如 $\lambda = 0.1, ATS = 500$ 时为 5.117 0, 表明 ETL_1 为 ETL 的 5.117 0 倍, 即联合经济模型设计的 VSI EWMA 控制图比 ATS 为评价准则设计的优越 5.117 0 倍.

因此, 通过上述分析得到: 在这两种控制图中, 联合经济模型设计的 VSI EWMA 控制图具有较小的期望损失, 优于 ATS 为评价准则设计的 VSI EWMA 控制图, 验证了经济模型的最优性.

7 结束语

本文基于质量损失函数和预防维修策略, 对可变抽样区间二项 EWMA 控制图进行经济设计. 首先建立基于质量损失函数的 VSI 二项 EWMA 控制图与预防维修策略联合经济模型; 其次根据工业中的一个例子说明如何运用遗传算法求解经济模型, 得出它的参数最优值. 然后为了得出设计参数与模型参数之间的

影响关系,对所建立的经济模型进行参数灵敏度分析.最后通过对比研究得出:联合经济模型设计的 VSI EWMA 控制图具有较小的期望损失,优于 ATS 为评价准则设计的 VSI EWMA 控制图,验证了经济模型的最优性.

参考文献:

- [1] Roberts S W. A comparison of some control chart procedures. *Technometrics*, 1966, 8(3): 411–430.
- [2] Reynolds M R Jr, Amin R W, Arnold J C, et al. X-bar charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 1988, 30(2): 181–192.
- [3] Chew X Y, Khoo M B C, The S Y, et al. The run sum Hotelling's χ^2 control chart with variable sampling intervals. *Quality and Reliability Engineering International*, 2016, 32(7): 2573–2590.
- [4] Lee M H, Khoo M B C. Double sampling $|S|$ control chart with variable sample size and variable sampling interval. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 2018, 47(2): 615–628.
- [5] Kazemzadeh R B, Amiri A, Kouhestani B. Monitoring simple linear profiles using variable sample size schemes. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2016, 86(15): 2923–2945.
- [6] 薛丽. 可变抽样区间二项 EWMA 控制图. *数理统计与管理*, 2016, 35(6): 1038–1044.
Xue L. EWMA control chart with variable sampling intervals under binomial distribution. *Journal of Applied Statistics and Management*, 2016, 35(6): 1038–1044. (in Chinese)
- [7] 张敏, 聂国华, 何楨. 自相关计数过程单侧控制图的构建. *系统工程学报*, 2014, 29(2): 280–288.
Zhang M, Nie G H, He Z. One-side EWMA control chart for auto-correlated process of count data and its performance analysis. *Journal of Systems Engineering*, 2014, 29(2): 280–288. (in Chinese)
- [8] 马义中, 田甜, 刘利平. 自相关过程协方差阵的残差 MEWMA 控制图. *系统工程学报*, 2012, 27(2): 279–286.
Ma Y Z, Tian T, Liu L P. Residual-based MEWMA control chart for the covariance matrix of autocorrelated process. *Journal of Systems Engineering*, 2012, 27(2): 279–286. (in Chinese)
- [9] 刘利平, 马义中. 自相关泊松计数过程的质量控制图. *系统工程学报*, 2010, 25(4): 506–511.
Liu L P, Ma Y Z. Quality control chart for auto-correlated Poisson counts process. *Journal of Systems Engineering*, 2010, 25(4): 506–511. (in Chinese)
- [10] Duncan A J. The economic design of X charts used to maintain current control of a process. *Journal of the American Statistical Association*, 1956, 51(2): 228–242.
- [11] Lorenzen T J, Vance L C. The economic design of control charts: A unified approach. *Technometrics*, 1987, 28(1): 3–10.
- [12] Chou C Y, Chen C H, Liu H R. Economic design of EWMA charts with variable sampling intervals. *Quality & Quantity*, 2006, 40(6): 879–896.
- [13] Zachary G S, Marion R, Reynolds Jr. Economic statistical design of adaptive control schemes for monitoring the mean and variance. An application to analyzers. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2005, 6(5): 817–844.
- [14] 薛丽. 监控均值标准差的可变抽样区间 EWMA 图经济设计. *计算机集成制造系统*, 2013, 19(6): 1369–1376.
Xue L. Economic design of variable sampling intervals EWMA charts for monitoring process mean and standard deviation. *Computer Integrated Manufacturing System*, 2013, 19(6): 1369–1376. (in Chinese)
- [15] 薛丽. 可变抽样区间几何 EWMA 控制图的经济设计. *运筹与管理*, 2013, 22(4): 126–132.
Xue L. Economic design of variable sampling intervals EWMA control charts under geometric distribution. *Operations Research and Management Science*, 2013, 22(4): 126–132. (in Chinese)
- [16] Niaki S T A, Paravaneh J. The economic design of multivariate binomial EWMA VSSI control charts. *Journal of Applied Statistics*, 2013, 40(6): 1301–1318.
- [17] 李乘龙, 苏秦, 张鹏伟. 多目标决策下的小批量生产过程控制图设计. *系统工程学报*, 2015, 30(3): 297–318.
Li C L, Su Q, Zhang P W. Multi-objective design of control chart for short-run production. *Journal of Systems Engineering*, 2015, 30(3): 297–318. (in Chinese)
- [18] 张鹏伟, 苏秦, 刘廷延. 面向小批量生产过程的贝叶斯控制图经济设计. *系统工程学报*, 2013, 27(1): 111–118.
Zhang P W, Su Q, Liu T Y. Economically designed multivariate Bayesian control chart for short-production. *Journal of Systems Engineering*, 2013, 27(1): 111–118. (in Chinese)
- [19] Patil S H, Shirke D T. Economic design of variable sampling interval sign control chart. *Journal of Industrial and Production Engineering*, 2017, 34(4): 253–260.

- [20] Farnoosh N, Viliam M. Economic design of multivariate Bayesian control chart with two sampling intervals sampling intervals. *International Journal of Production Economics*, 2016, 174: 29–42.
- [21] McKone K E, Weiss E N. TPM: Planned and autonomous maintenance: Bridging the gap between practice and research. *Production and Operations Management*, 1998, 7(4): 335–351.
- [22] El-Ferik S. Economic production lot-sizing for an unreliable machine under imperfect age-based maintenance policy. *European Journal of Operational Research*, 2008, 186(1): 150–163.
- [23] Zohreh M, Rassoul N. An integrated model based on statistical process control and maintenance. *Computers & Industrial Engineering*, 2011, 61(4): 1245–1255.
- [24] Zhou W H, Zhu G L. Economic design of integrated model of control chart and maintenance management. *Mathematical and Computer Modelling*, 2008, 47(11): 1389–1395.
- [25] 刘学娟, 赵 斐, 马晓洋. 考虑生产率调整的多产品EPQ与设备维修整合模型. *系统工程学报*, 2018, 33(1): 136–144.
Liu X J, Zhao P, Ma X Y. Integrated EPQ and maintenance model for a multi-product production system with varying production rate. *Journal of Systems Engineering*, 2018, 33(1): 136–144. (in Chinese)
- [26] Bouslah B, Gharbi A, Pellerin R. Integrated production sampling quality control and maintenance of deteriorating production systems with AOQL constraint. *The International Journal of Management Science*, 2016, 61: 110–126.
- [27] Xiang, Y. Join optimization of control chart and preventive maintenance policies: A discrete-time Markov chain approach. *European Journal of Operational Research*, 2013, 229(2): 382–390.
- [28] Salmasnia A, Abdzadeh B, Namdar M. A joint design of production run length, maintenance policy and control chart with multiple assignable causes. *Journal of Manufacturing Systems*, 2017, 42: 44–56.
- [29] Khruasom P, Pongpullponsak A. The integrated model of the Kolmogorov–Smirnov distribution-free statistic approach to process control and maintenance. *Journal of King Saud University: Science*, 2017, 29(2): 182–190.

作者简介:

薛 丽(1981—), 女, 河南项城人, 博士, 副教授, 硕士生导师, 研究方向: 质量工程, Email: xuelitt@hotmail.com;

何 桢(1967—), 男, 河南濮阳人, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向: 质量管理, Email: zhhe@tju.edu.cn.