第 35 卷第 5 期　　系 统 工 程 学 报　　Vol.35 No.5
2020 年 10 月　　JOURNAL OF SYSTEMS ENGINEERING　　Oct. 2020

随机利率背景下具有多方担保公司债券的定价

林建伟，李慧敏
(莆田学院数学与金融学院, 福建 莆田 351100)

摘要: 在随机利率背景下, 基于公司违约强度的相互依赖性结构刻画因担保而形成的公司违约相互依赖性结构, 采用约化方法, 考虑具有多方担保公司债券的定价问题, 建立了多方担保公司债券定价的数学模型, 获得了定价的显式表达式, 并分析随机利率风险和担保风险.

关键词: 约化方法; 随机利率; 多方担保; 公司债券定价; 违约强度
中图分类号: F830　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000−5781(2020)05−0632−10
doi: 10.13383/j.cnki.jse.2020.05.006

Pricing of multi-party guarantee corporate bonds in the context of stochastic interest rates

Lin Jianwei, Li Huimin
(Department of Mathematics and Finance, Putian University, Putian 351100, China)

Abstract: Under the background of stochastic interest rates, this paper considers the pricing of the multi-party guarantee corporate bonds by the reduction method. It models the mutual dependence structure of three corporate defaults by the default intensity contagion process. Moreover, it establishes the mathematical model of the multi-party guarantee corporate bond and obtains the corresponding pricing formulae. At last, this paper analyses the financial significance of the stochastic interest rate risk and the guarantee risk.

Key words: reduction method; stochastic interest rates; multi-party guarantee; corporate bond pricing; default intensity

1 引　言

随着金融市场的迅速发展, 担保债券具有信用增级功能, 越来越受到投资者的青睐, 其发行的规模越来越大, 一定程度上解决了公司融资难的问题, 加快了公司的发展. 但担保债券因担保极易形成违约连锁反应, 导致担保公司和发行债券公司违约时间的聚集, 投资者面临的潜在违约风险将大大增加. 因此如何合理有效地对担保债券进行定价是金融研究的重要问题之一. 公司债券定价的研究方法主要有两种方法: 结构化方法和约化方法. 本文集中于采用约化方法研究担保公司债券定价问题. 约化方法旨在把公司的违约过程看成是一个外在的过程, 利用 Poisson 过程的第一次跳来刻画违约事件, 相应的违约强度称为公司的违约强度, 即单位时间内公司的违约概率. 该方法最早由 Jarrow 等[1,2]提出. Lando[3]和 Duffie 等[4] 通过复合 Poisson 过程刻画依赖于宏观市场因素的公司违约强度模型, 采用约化方法对公司债券进行定价, 但模型

收稿日期: 2018−04−15; 修订日期: 2018−10−29.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11471175, 11001142); 福建省科技重点资助项目(jy2016xsj01); 福建省自然科学基金资助项目(2016J01678); 福建省社会科学规划资助项目(FJ2016B235); 莆田市科技计划项目(2019RP001).

未考虑公司违约时间的聚集现象. Jarrow 等[5]在公司违约强度中引入了其他公司违约时间的影响, 首次提出了违约强度传染性模型, 刻画了公司违约的聚集现象, 进而对具有单向违约依赖关系的公司债券进行定价. Collin-Dufresne 等[6]在 Jarrow 等[5]模型的基础上, 进一步获得了具有环形违约依赖关系的公司债券定价公式. 以上文献的研究主要利用约化方法考虑无担保公司债券的定价, 而未考虑担保债券定价问题. 在担保债券定价方面, 任学敏等[7]利用约化方法, 在随机利率背景下对于单方担保公司债券进行定价, 但模型未考虑担保公司和发行债券公司之间的违约相关性. 刘易等[8]在利率为常数假定下, 考虑了具有相关性的单方担保公司债券定价问题, 但模型未考虑随机利率的影响. 刘红生等[9] 引进第三方增信机构, 建立基于第三方增信的银企博弈模型, 讨论了增信成本在银行和企业之间的分担比例, 但模型未考虑多方担保增信功能的影响. 林建伟等[10]在 Jarrow 等[5]模型基础上, 利用约化法建立了具有双向违约依赖关系的担保公司债券数学模型, 通过总的违约构建方法, 获得了定价的显式表达式, 但模型也未考虑随机利率风险的影响和多方担保情形. 夏鑫等[11]利用约化方法, 在随机利率背景下, 运用单向指数衰减违约传染模型研究了单方担保债券的定价问题, 但模型仅获得了定价的积分表达式, 且也未考虑多方担保债券定价问题. 但事实上, 金融市场上公司债券, 特别是中小微公司发行的债券, 由于其公司规模小, 资金紧缺, 单方担保为其担保获得的信用增级还不足以吸引投资者, 特别是对于银行机构来说, 单方担保还不足以增强银行对于中小微企业到期还本付息的信心, 需要多方合力为其发行债券提供担保, 传递其具有到期还款能力, 增强银行对于中小微企业贷款的信心, 解决中小微企业融资难的问题.

本文拟通过随机利率和多方担保两个重要特征分别刻画宏观市场因素对于定价的影响和违约的聚集现象, 基于违约强度传染性模型[5]刻画因多方担保而形成的公司违约相互依赖性, 采用随机分析的理论和约化法, 在随机利率背景下, 建立具有多方担保公司债券的数学模型, 获得定价的显式表达式, 并基于数值计算, 分析随机利率风险和因多方担保所可能引发的违约传染性风险对定价的影响.

2　多方担保公司债券定价

2.1　基本假定

1) 完备的概率测度空间$(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T},Q)$表示$[0,T]$时间段上所有的信息流, 其中 $\mathcal{F}_T=\mathcal{F}$, Q 为 Harrison 等[12]意义下等价鞅测度. 在此概率测度空间上, 让随机利率 r 表示唯一的宏观经济因素过程, $\mathcal{F}_{r,t}=\sigma(r_s:s\leqslant t)$表示相应产生的自然流. 令 τ_i 表示随机利率 r 背景下公司 i 的违约时间, $i=1,2,3$; $N_{i,t}=I_{\{\tau_i\leqslant t\}}$表示公司 i 的违约过程, 并独立于随机利率过程 r, $\mathcal{F}_{i,t}=\sigma(N_{i,t}{:}s\leqslant t)$ 表示相应产生的自然流, $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_{r,t}\vee\mathcal{F}_{1,t}\vee\mathcal{F}_{2,t}\vee\mathcal{F}_{3,t}$ 表示$[0,t]$时段内市场产生的所有信息. 假设 τ_i 具有非负, $\mathcal{F}_t$ 可测的违约强度过程 $\lambda_{i,t}$, 且其满足对任意 $t\geqslant 0$, 在等价鞅测度 Q 下, $\mathrm{E}^Q[\int_0^t\lambda_{i,s}\mathrm{d}s]<+\infty$ 和相应的补偿过程 $M_{i,t}=N_{i,t}-\int_0^{t\wedge\tau_i}\lambda_{i,s}\mathrm{d}s$ 是一个 $\mathcal{F}_t$ 可测鞅.

2) 在等价鞅测度 Q 下, 随机利率 r 服从如下 CIR 模型

$$\mathrm{d}r_t=\alpha(\theta-r_t)\mathrm{d}t+\sigma\sqrt{r_t}\mathrm{d}W_t, \tag{1}$$

其中 α,θ,σ 为常数, 且满足 $2\alpha\theta\geqslant\sigma^2$, $\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 为标准的 Brown 运动.

3) 担保条款规定: 公司 1 发行了零息票债券, 到期日为 T, 到期面值为 1 元. 在债券期限$[0,T]$ 内, 公司 2 和公司 3 为公司 1 发行的债券联合提供担保, 即规定公司 1 在债券期限内一旦宣布违约, 若公司 2 和公司 3, 至少有一家公司还没有宣布违约, 则公司 1 债券的损失将由公司 2 和公司 3 共同承担; 否则公司 1 债券按照面值回收, 只能在到期日得到 R 元, $0<R<1$ 表示公司 1 债券的回收率.

4) 违约强度模型–违约传染性模型[5]

$$\begin{cases}\lambda_{1,t}=a_1\\ \lambda_{2,t}=a_2+b_2I_{\{\tau_1\leqslant t\}}\\ \lambda_{3,t}=a_3+b_3I_{\{\tau_1\leqslant t\}}.\end{cases} \tag{2}$$

违约强度模型(2)描述了公司 1, 公司 2 和公司 3 之间因债券存在担保关系而形成了违约相互依赖性结构, 由此刻画了公司违约的聚集现象. 这里 a_1, a_2, a_3 为正常数, 分别表示公司 1, 公司 2 和公司 3 自身对公司违约的影响因子; b_2, b_3 为正常数, 且 $b_2 + b_3 < a_1$[1], 表示因公司 2 和公司 3 为公司 1 发行债券提供担保而导致的违约传染因子, 即公司 1 一旦宣布违约, 若公司2还没有违约, 因公司 2 为公司 1 债券提供担保, 其违约强度将发生跳跃, 从 a_2 增大到 $a_2 + b_2$, 同理若公司 3 还没有违约, 其违约强度将从 a_3 增大到 $a_3 + b_3$.

5) 两家公司同时发生违约的概率为零.

基于基本假定 1)～假定 5), 在随机利率背景下具有多方担保公司债券定价的数学模型为

$$P(t,T) = \mathrm{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s}\left(I_{\{\tau_1>T\}} + I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1<\max\{\tau_2,\tau_3\}\}} + RI_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\max\{\tau_2,\tau_3\}\}}\right)|\mathcal{F}_t\right], t\in[0,T], \tag{3}$$

其中 $P(t,T)$ 表示公司 1 发行的多方担保债券价格, 等式(3)右边第一项表示若公司 1 在债券期限内没有宣布违约, 则多方担保债券持有人将在到期日 T 时刻获得 1 元; 第二项表示虽然公司 1 在债券期限内已经宣布违约, 但是在公司 1 宣布违约之后, 公司 2 或公司 3 至少有一家公司还没有宣布违约, 此时根据债券具有担保特征, 债券持有人仍将在到期日 T 时刻获得 1 元; 第三项表示若公司 1 在债券期限内已经宣布违约, 且在公司 1 宣布违约之前, 公司 2 和公司 3 都已经发生违约, 则债券持有者只能在到期日 T 时刻按照面值回收获得 R 元.

基于多方担保公司债券定价模型(3), 考虑到随机利率 r 与违约时间 τ_i 独立, $i = 1, 2, 3$, 可知求解多方担保债券价格 $P(t,T)$的关键在于求解(τ_1, τ_2, τ_3)联合违约概率密度.

引理 1 任意给定正数 a_1, a_2, a_3, b_2, b_3, 并满足 $b_2 + b_3 < a_1$ 条件, 公司 1, 公司 2 和公司 3 相应的违约时间 τ_1, τ_2 和 τ_3 联合违约概率密度为

$$f(t_1,t_2,t_3) = \begin{cases} a_1(a_2+b_2)(a_3+b_3)\mathrm{e}^{-(a_1-b_2-b_3)t_1-(a_2+b_2)t_2-(a_3+b_3)t_3}, & t_1 \leqslant \min\{t_2,t_3\} \\ a_1a_2a_3\mathrm{e}^{-a_1t_1-a_2t_2-a_3t_3}, & t_1 \geqslant \max\{t_2,t_3\} \\ a_1a_2(a_3+b_3)\mathrm{e}^{-(a_1-b_3)t_1-a_2t_2-(a_3+b_3)t_3}, & t_2 \leqslant t_1 \leqslant t_3 \\ a_1a_3(a_2+b_2)\mathrm{e}^{-(a_1-b_2)t_1-(a_2+b_2)t_2-a_3t_3}, & t_3 \leqslant t_1 \leqslant t_2. \end{cases} \tag{4}$$

详细的证明过程见附录.

利用(τ_1, τ_2, τ_3)联合概率密度表达式(4), 结合文献[13]关于随机贴现因子 $\mathrm{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t\right]$的结果, 可求得多方担保债券价格$P(t,T)$ 的表达式.

定理 1 多方担保债券价格$P(t,T)$解的表达式为

$$\begin{aligned} P(t,T) = {} & A(t,T)\mathrm{e}^{-B(t,T)r_t}\Bigg(1-(1-R)\Bigg(I_{\{\tau_1\leqslant t,\tau_1>\max\{\tau_2,\tau_3\}\}} + \\ & I_{\{\tau_1>t,\max\{\tau_2,\tau_3\}<t\}}\left(1-\mathrm{e}^{-a_1(T-t)}\right) + \\ & I_{\{\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3\leqslant t\}}\left(\frac{a_1\mathrm{e}^{-(a_1+a_2)(T-t)}+a_2}{a_1+a_2} - \mathrm{e}^{-a_1(T-t)}\right) + \\ & I_{\{\tau_1>t,\tau_3>t,\tau_2\leqslant t\}}\left(\frac{a_1\mathrm{e}^{-(a_1+a_3)(T-t)}+a_3}{a_1+a_3} - \mathrm{e}^{-a_1(T-t)}\right) + \\ & I_{\{\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3>t\}}\Bigg(1+\frac{a_1(1-\mathrm{e}^{-(a_1+a_2+a_3)(T-t)})}{a_1+a_2+a_3} - \mathrm{e}^{-a_1(T-t)} - \\ & \frac{a_1\mathrm{e}^{a_3t}(1-\mathrm{e}^{-(a_1+a_2)(T-t)})}{a_1+a_2} - \frac{a_1\mathrm{e}^{a_2t}(1-\mathrm{e}^{-(a_1+a_3)(T-t)})}{a_1+a_3}\Bigg)\Bigg)\Bigg), \quad t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{5}$$

[1]该参数条件体现了由公司 1 所有债务引起的违约因子大于仅由于公司 1 发行的多方担保债券损失引起的违约传染因子总和.

特别当 $t=0$ 时, 债券的发行价格为

$$P(0,T)=A(0,T)\mathrm{e}^{-B(0,T)r_0}\Bigg(1-(1-R)\Bigg(\Bigg(1-\mathrm{e}^{-a_1T}+\frac{a_1(1-\mathrm{e}^{-(a_1+a_2+a_3)T})}{a_1+a_2+a_3}-\frac{a_1(1-\mathrm{e}^{-(a_1+a_2)T})}{a_1+a_2}-\frac{a_1(1-\mathrm{e}^{-(a_1+a_3)T})}{a_1+a_3}\Bigg)\Bigg)\Bigg), \tag{6}$$

其中 $A(t,T)=\left(\frac{2\gamma\mathrm{e}^{(\alpha+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right)^{\frac{2\alpha\theta}{\sigma^2}}, B(t,T)=\frac{2(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}, \gamma=\sqrt{\alpha^2+2\sigma^2}$.

定理 1 详细的证明过程见附录[2].

为了讨论多方担保价值金融意义的需要, 也给出相应无担保公司债券定价模型和定价公式.

无担保债券定价 由于公司 2 和公司 3 未为公司 1 发行的债券提供担保, 违约强度之间不存在相互依赖性, 因此公司 1, 公司 2, 公司 3 三者的违约强度

$$\bar{\lambda}_{1,t}=a_1,\ \ \bar{\lambda}_{2,t}=a_2,\ \ \bar{\lambda}_{3,t}=a_3,$$

无担保公司债券定价数学模型为

$$\bar{P}(t,T)=\mathrm{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}\left(I_{\{\bar{\tau}_1>T\}}+RI_{\{\bar{\tau}_1\leqslant T\}}\right)|\bar{\mathcal{F}}_t\right],$$

其中 $\bar{\mathcal{F}}_t$ 表示由随机利率 r 和无担保时公司 1, 公司 2, 公司 3 的违约时间 $\bar{\tau}_1,\bar{\tau}_2,\bar{\tau}_3$ 在$[0,t]$时间段内生成的市场所有信息, 具体构造如同 2.1 节中 $\mathcal{F}_t$ 的构造.

经过计算, 可得无担保公司债券定价公式

$$\bar{P}(t,T)=A(t,T)\mathrm{e}^{-B(t,T)r_t}\left(1-(1-R)\left(I_{\{\bar{\tau}_1\leqslant t\}}+I_{\{\bar{\tau}_1>t\}}\left(1-\mathrm{e}^{-a_1(T-t)}\right)\right)\right),$$

特别当 $t=0$ 时,

$$\bar{P}(0,T)=A(0,T)\mathrm{e}^{-B(0,T)r_0}\left(1-(1-R)\left(1-\mathrm{e}^{-a_1T}\right)\right). \tag{7}$$

3 金融意义分析

3.1 信用利差

多方担保的价值体现在发行债券的信用增级方面. 令 $\delta,\bar{\delta}$ 分别表示多方担保债券和无担保债券相应的信用利差, 通过关系式 $P(0,T)=\mathrm{E}^Q[\mathrm{e}^{-\int_0^T(r_s+\delta)\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t]$和 $\bar{P}(0,T)=\mathrm{E}^Q[\mathrm{e}^{-\int_0^T(r_s+\bar{\delta})\mathrm{d}s}|\bar{\mathcal{F}}_t]$, 可得多方担保为公司债券提供的信用增级表达式

$$\bar{\delta}-\delta=\frac{1}{T}\ln(P(0,T)/\bar{P}(0,T)). \tag{8}$$

特别当$P(0,T)>\bar{P}(0,T)$, 即 $\bar{\delta}>\delta$, 表明多方担保提高了公司债券的信用等级, 增强了市场投资者对发行债券的青睐程度, 提高了公司债券的发行价格, 从而降低了公司的融资成本, 解决了公司(特别是中小微公司)融资难的问题.

3.2 担保公司违约概率

多方担保所可能产生的负面影响主要体现在担保公司面临的违约风险方面.

当公司 2 和公司 3 没有为公司 1 发行的债券提供担保时, 基于无担保公司违约强度, 计算可得, 公司 2 和公司 3 在债券到期日之前都发生违约概率

$$\Pr(\bar{\tau}_2<T,\bar{\tau}_3<T)=1-\mathrm{e}^{-a_2T}-\mathrm{e}^{-a_3T}+\mathrm{e}^{-(a_2+a_3)T}. \tag{9}$$

[2]从多方担保债券价格表达式(5), 发现债券价格不依赖于违约传染因子 b_2,b_3. 事实上, 违约传染因子 b_2,b_3 只在公司 1 宣布违约之后产生影响, 此时债券合约已经终止, 因此 b_2,b_3 不对债券的价格产生影响. 但此时若公司 2 或公司 3 未违约, 则将对公司 2 或公司 3 的违约概率产生影响, 增大公司 2 或公司3 的违约风险.

当公司 2和公司 3 为公司 1 发行的债券提供担保时,

1) 公司1在债券到期日之前可能发生违约情形下, 利用(τ_1,τ_2,τ_3)联合密度公式(4), 可得担保公司 2 和担保公司 3 在 T 时刻之前都发生违约概率

$$\begin{aligned}\Pr(\tau_2<T,\tau_3<T)=&1-\frac{a_1\mathrm{e}^{-b_2T}-b_2\mathrm{e}^{-a_1T}}{a_1-b_2}\mathrm{e}^{-a_2T}-\frac{a_1\mathrm{e}^{-b_3T}-b_3\mathrm{e}^{-a_1T}}{a_1-b_3}\mathrm{e}^{-a_3T}+\\&\frac{a_1\mathrm{e}^{-(b_2+b_3)T}-(b_2+b_3)\mathrm{e}^{-a_1T}}{a_1-b_2-b_3}\mathrm{e}^{-(a_2+a_3)T}.\end{aligned}\tag{10}$$

2) 公司 1 在债券到期日之前肯定发生违约情形下, 基于式(4), 可得担保公司 2 和担保公司 3 在 T 时刻之前都发生违约概率

$$\begin{aligned}\Pr(\tau_2<T,\tau_3<T|\tau_1<T)=&1-\frac{a_1}{a_1-b_3}\frac{\mathrm{e}^{-b_3T}-\mathrm{e}^{-a_1T}}{1-\mathrm{e}^{-a_1T}}\mathrm{e}^{-a_3T}-\frac{a_1}{a_1-b_2}\frac{\mathrm{e}^{-b_2T}-\mathrm{e}^{-a_1T}}{1-\mathrm{e}^{-a_1T}}\mathrm{e}^{-a_2T}+\\&\frac{a_1}{a_1-b_2-b_3}\frac{\mathrm{e}^{-(b_2+b_3)T}-\mathrm{e}^{-a_1T}}{1-\mathrm{e}^{-a_1T}}\mathrm{e}^{-(a_2+a_3)T}.\end{aligned}\tag{11}$$

根据存在担保时和无担保时公司 1, 公司 2 和公司 3 的违约强度, 发现违约强度 $\lambda_{1,t}=\bar{\lambda}_{1,t},\lambda_{2,t}\geqslant\bar{\lambda}_{2,t},\lambda_{3,t}\geqslant\bar{\lambda}_{3,t}$, 由此可知 $\Pr(\bar{\tau}_2<T,\bar{\tau}_3<T)\leqslant\Pr(\tau_2<T,\tau_3<T)\leqslant\Pr(\tau_2<T,\tau_3<T|\tau_1<T)$. 此不等式暗示了多方担保一方面能为公司所发行的债券信用增级, 但另一方面, 将引发违约风险的传染, 特别在发行债券的公司在到期日之前肯定发生违约情况下, 担保公司全部发生违约的可能性将大大增加, 造成违约的聚集现象.

4 数值结果分析

基于多方担保和无担保公司债券的定价结果, 信用利差以及担保公司的违约概率表达式, 考察随机利率风险和多方担保所可能引发的违约传染风险对公司债券定价的影响. 基本参数设定为 $a_1=0.3,a_2=0.1,a_3=0.15,b_2=0.05,b_3=0.1,\alpha=0.5,\theta=0.1,\sigma=0.2,r_0=0.05,R=0.5,T=5$. 为了方便阐述, 让 $P^*=P(0,T)-\bar{P}(0,T)$表示担保价值, $\delta^*=\bar{\delta}-\delta$ 表示信用利差, $Q=\Pr(\bar{\tau}_2<T,\bar{\tau}_3<T)$表示无担保时公司 2 和公司 3 在到期日 T 之前都发生违约的概率, $Q_1=\Pr(\tau_2<T,\tau_3<T),Q_2=\Pr(\tau_2<T,\tau_3<T|\tau_1<T)$分别表示存在担保关系时公司 2 和公司 3 在 T 之前都发生违约的概率和条件违约概率.

担保价值 P^* 关于 r_0 和 σ 的变化关系分别如图 1 和图 2 所示.

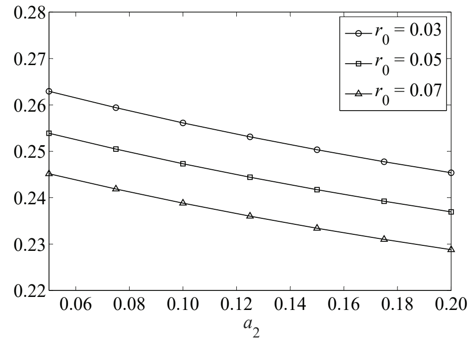

图 1 担保价值 P^* 关于 r_0 的变化关系

Fig. 1 The guarantee value P^* with varying r_0

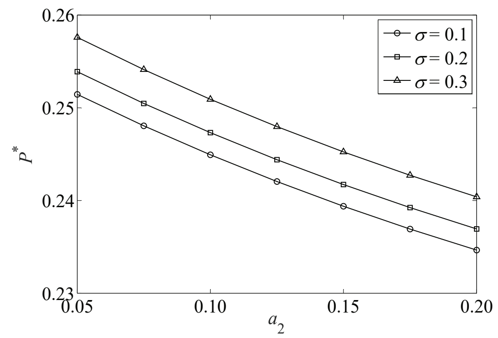

图 2 担保价值 P^* 关于 σ 的变化关系

Fig. 2 The guarantee value P^* with varying σ

图 1 和图 2 表明, 担保价值恒大于零, 关于担保公司 2 的自身违约因子 a_2 和初始市场利率 r_0 单调递减, 但关于市场的波动率 σ 单调递增. 该数值结果说明: 1) 相比于担保情形, 多方担保条款提高了公司债券对投资者的青睐程度, 提高了公司债券的发行价格; 2) 信用等级越高的担保公司为债券提供担保所体现的担保

价值越高, 相应的担保债券对市场投资的吸引度更高; 3) 当市场经济环境越差, 市场环境越动荡, 多方担保所体现的担保价值越大.

担保价值 P^* 关于 a_1 的变化关系见图 3, 信用利差 δ^* 关于 a_1 的变化关系见图 4.

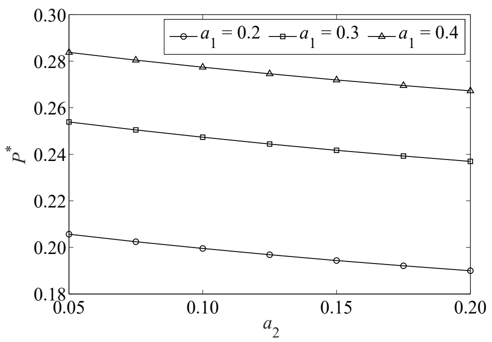

图 3　担保价值 P^* 关于 a_1 的变化关系

Fig. 3　The guarantee value P^* with varying a_1

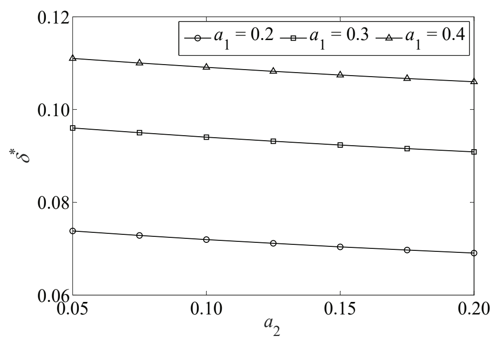

图 4　信用利差 δ^* 关于 a_1 的变化关系

Fig. 4　The credit spread δ^* with varying a_1

从图 3 和图 4 发现, 担保价值和信用利差关于被担保公司1的自身违约强度 a_1 单调递增. 其金融意义为相比于无担保情形, 当被担保公司的信用等级越低, 多方担保对被担保公司债券的信用增级越多, 公司债券对市场投资者青睐度增加越多, 所体现的担保价值越大.

违约概率 Q_1 和条件违约概率 Q_2 关于 b_2 的变化关系分别如图 5 和图 6 所示.

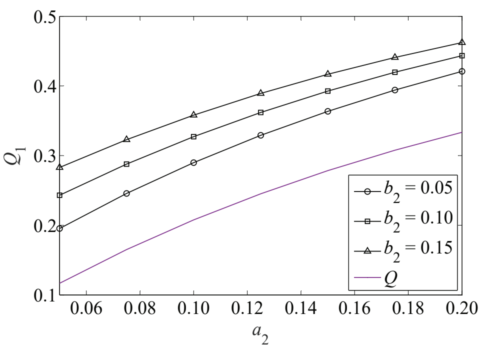

图 5　违约概率 Q_1 关于 b_2 的变化关系

Fig. 5　The default probability Q_1 with varying b_2

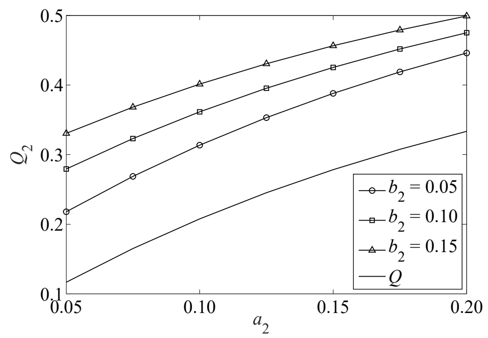

图 6　条件违约概率 Q_2 关于 b_2 的变化关系

Fig. 6　The conditional default probability Q_2 with varying b_2

图 5 表明, 相比于无担保情形, 担保公司 2 和担保公司 3 在到期日 T 之前都发生违约的概率更大, 且违约概率关于公司 2 自身的违约因子 a_2 和传染因子 b_2 单调递增. 其金融意义为: 相比于无担保情形, 当在债券合约到期日 T 之前, 若公司 1 违约, 由于公司 2 和公司 3 为公司 1 发行的债券提供担保, 公司 2 和公司 3 的违约强度将发生跳跃, 分别增加 b_2 和 b_3, 因此增大了公司 2 和公司 3 在到期日 T 之前都发生违约的概率, 且增大幅度随着 b_2 增大而增大, 特别当 $b_2 = 0.15$ 时, 违约概率增大达约 0.17. 从图 6 进一步看出, 当被担保公司 1 在到期日 T 之前肯定发生违约条件下, 公司 2 和公司3 因为担保而导致面临的传染风险进一步增大, 违约概率增大的幅度更大, 当 $b_2 = 0.15$ 时, 相应条件违约概率增大达约 0.23. 这也暗示了多方担保一方面具有信用增级功能, 但另一方面也将导致违约的巨大传染, 增大担保公司的违约可能性, 引发违约的聚集现象.

5　结束语

本文采用约化方法和随机分析理论, 在随机利率背景下, 基于违约强度的传染性模型, 建立了具有多方

担保公司债券定价的数学模型, 获得了多方担保公司债券解的显式表达式. 相比于无担保情形下公司债券的定价模型, 通过担保价值、信用利差、违约概率以及条件违约概率对随机利率风险和由于多方担保所隐含的传染性风险进行金融意义分析.

参考文献:

[1] Jorrow R, Turnbull S. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. Journal of Finance, 1995, 50(1): 53–85.

[2] Jorrow R, Lando D, Turnbull S. A Markov model for the term structure of credit risk spread. Review of Financial Studies, 1997, 10(2): 481–523.

[3] Lando D. On Cox processes and credit risky securities. Riview of Derivatives Research, 1998, 2(2): 99–120.

[4] Duffie D, Singleton K. Modeling term structures of defaultable bonds. Review of Financial Studies, 1999, 12(4): 687–720.

[5] Jarrow R, Yu F. Counterparty risk and the pricing of defaultable securities. Journal of Finance, 2001, 56(5): 1765–1800.

[6] Collin-Dufresne P, Goldstein R, Hugonnier J. A general formula for valuing defaultable securities. Econometrica, 2004, 72(5): 1377–1407.

[7] 任学敏, 万 凝. 用约化方法对有第三方担保的企业债券定价. 同济大学学报, 2009, 37(7): 989–992.
Ren X M, Wan N. Pricing of firm bond with third party surety by reduced form appoach. Journal of Tongji University, 2009, 37(7): 989–992.

[8] 刘 易, 任学敏, 花 虹. 考虑相关性的第三方担保价值的评估. 同济大学学报, 2013, 41(3): 465–469.
Liu Y, Ren X M, Hua H. Evaluation of firm bond with correlated third party guarantee. Journal of Tongji University, 2013, 41(3): 465–469.

[9] 刘红生, 李帮义. 基于增信成本分担比例的中小企业信贷循环机制. 系统工程学报, 2016, 31(5): 625–632.
Liu H S, Li B Y. Credit revolving mechanism of SMEs based on credit enhancement costs-sharing. Journal of Systems Engineering, 2016, 31(5): 625–632.

[10] 林建伟, 任学敏. 双方互相担保公司债券的定价和风险分析. 系统工程理论与实践, 2009, 29(2): 87–99.
Lin J W, Ren X M. Valuation and risk analysis of mutually guaranteed corporate bonds. Systems Engineerings: Theory and Practice, 2009, 29(2): 87–99.

[11] 夏 鑫, 杨招军. 交易对手风险下担保债券及债券担保合约的定价. 系统工程, 2015, 33(8): 84–89.
Xia X, Yang Z J. Valuation of guaranteed debt and bond guarantee contracts with counterparty risk. Systems Engineering, 2015, 33(8): 84–89.

[12] Harrison M, Kreps D. Martingales and arbitrage in multiperiod securities market. Journal of Economic Theory, 1979, 20(3): 381–408.

[13] Cox J C, Ingersoll J E, Ross S A. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica, 1985, 53(2): 385–407.

作者简介:

林建伟(1979—), 男, 福建莆田人, 博士, 教授, 研究方向: 偏微分方程与金融数学, Email: jianwei_lin@126.com;

李慧敏(1986—), 女, 福建莆田人, 硕士, 讲师, 研究方向: 金融数学, Email: caspia2010@126.com.

附 录

引理 1 的证明 基于(τ_1,τ_2,τ_3)的违约强度模型(2), 考虑(τ_1,τ_2,τ_3) 联合概率分布如下:

1) 当 $0<t_1\leqslant\min\{t_2,t_3\}$时, 若 $t_2\leqslant t_3$, 则 $0<t_1\leqslant t_2\leqslant t_3$,

$$\Pr(\tau_1\leqslant t_1,\tau_2\leqslant t_2,\tau_3\leqslant t_3)=\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\leqslant t_1\}}I_{\{\tau_2\leqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}\right]=\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\leqslant t_1\}}\mathrm{E}[I_{\{\tau_2\leqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}|\tau_1]\right].$$

条件期望 $\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_2\leqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}|\tau_1\right]=\int_0^{t_2}\lambda_{2,u}\mathrm{e}^{-\int_0^u\lambda_{2,\bar u}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u\int_0^{t_3}\lambda_{3,v}\mathrm{e}^{-\int_0^v\lambda_{3,\bar v}\mathrm{d}\bar v}\mathrm{d}v.$

由于 $\tau_1\leqslant t_1, t_1\leqslant t_2$, 可知 $\tau_1\leqslant t_2$, 因此

$$\begin{aligned}\int_0^{t_2}\lambda_{2,u}\mathrm{e}^{-\int_0^u\lambda_{2,\bar u}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u&=\int_0^{\tau_1}\lambda_{2,u}\mathrm{e}^{-\int_0^u\lambda_{2,\bar u}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u+\int_{\tau_1}^{t_2}\lambda_{2,u}\mathrm{e}^{-\int_0^u\lambda_{2,\bar u}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\tau_1}(a_2+b_2I_{\{\tau_1\leqslant u\}})\mathrm{e}^{-a_2u-b_2\int_0^uI_{\{\tau_1\leqslant\bar u\}}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u+\\&\quad\int_{\tau_1}^{t_2}(a_2+b_2I_{\{\tau_1\leqslant u\}})\mathrm{e}^{-a_2u-b_2\int_0^uI_{\{\tau_1\leqslant\bar u\}}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\tau_1}a_2\mathrm{e}^{-a_2u}\mathrm{d}u+\int_{\tau_1}^{t_2}(a_2+b_2)\mathrm{e}^{-a_2u-b_2(u-\tau_1)}\mathrm{d}u=1-\mathrm{e}^{b_2\tau_1-(a_2+b_2)t_2}.\end{aligned}$$

由于 $\tau_1\leqslant t_1, t_1\leqslant t_3$, 可知 $\tau_1\leqslant t_3$, 同理可求得 $\int_0^{t_3}\lambda_{3,v}\mathrm{e}^{-\int_0^v\lambda_{3,\bar v}\mathrm{d}\bar v}\mathrm{d}v=1-\mathrm{e}^{b_3\tau_1-(a_3+b_3)t_3}$.

综上, $\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_2\leqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}|\tau_1\right]=\left(1-\mathrm{e}^{b_2\tau_1-(a_2+b_2)t_2}\right)\left(1-\mathrm{e}^{b_3\tau_1-(a_3+b_3)t_3}\right)$, 由此得到

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\leqslant t_1\}}\mathrm{E}[I_{\{\tau_2\leqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}|\tau_1]\right]&=\int_0^{t_1}a_1\mathrm{e}^{-a_1s}\left(1-\mathrm{e}^{b_2s-(a_2+b_2)t_2}\right)\left(1-\mathrm{e}^{b_3s-(a_3+b_3)t_3}\right)\mathrm{d}s\\&=a_1\left(\frac{1}{a_1}(1-\mathrm{e}^{-a_1t_1})+\frac{1}{b_2-a_1}(1-\mathrm{e}^{(b_2-a_1)t_1})\mathrm{e}^{-(a_2+b_2)t_2}+\right.\\&\left.\frac{1}{b_3-a_1}(1-\mathrm{e}^{(b_3-a_1)t_1})\mathrm{e}^{-(a_3+b_3)t_3}-\frac{1}{b_2+b_3-a_1}(1-\mathrm{e}^{(b_2+b_3-a_1)t_1})\mathrm{e}^{-(a_2+b_2)t_2-(a_3+b_3)t_3}\right).\end{aligned}$$

上式两端关于 t_1,t_2,t_3 求一阶偏导数, 可得当 $0<t_1\leqslant t_2\leqslant t_3$ 时,

$$f(t_1,t_2,t_3)=a_1(a_2+b_2)(a_3+b_3)\mathrm{e}^{-(a_1-b_2-b_3)t_1-(a_2+b_2)t_2-(a_3+b_3)t_3}.$$

若 $t_3\leqslant t_2$, 则 $0<t_1\leqslant t_3\leqslant t_2$ 时, 同理可得

$$f(t_1,t_2,t_3)=a_1(a_2+b_2)(a_3+b_3)\mathrm{e}^{-(a_1-b_2-b_3)t_1-(a_2+b_2)t_2-(a_3+b_3)t_3}.$$

2) 当 $t_1\geqslant\max\{t_2,t_3\}>0$ 时, 若 $t_2\geqslant t_3$, 则 $0<t_3\leqslant t_2\leqslant t_1$ 时,

$$\Pr(\tau_1\geqslant t_1,\tau_2\geqslant t_2,\tau_3\geqslant t_3)=\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\geqslant t_1\}}I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\geqslant t_3\}}\right]=\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\geqslant t_1\}}\mathrm{E}[I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\geqslant t_3\}}|\tau_1]\right].$$

计算条件期望 $\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\geqslant t_3\}}|\tau_1\right]$.

$$\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\geqslant t_3\}}|\tau_1\right]=\int_{t_2}^{\infty}\lambda_{2,u}\mathrm{e}^{-\int_0^u\lambda_{2,\bar u}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u\int_{t_3}^{\infty}\lambda_{3,v}\mathrm{e}^{-\int_0^v\lambda_{3,\bar v}\mathrm{d}\bar v}\mathrm{d}v.$$

由于 $\tau_1\geqslant t_1, t_1\geqslant t_2$, 可知 $\tau_1\geqslant t_2$, 因此

$$\begin{aligned}\int_{t_2}^{\infty}\lambda_{2,u}\mathrm{e}^{-\int_0^u\lambda_{2,\bar u}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u&=\int_{t_2}^{\tau_1}\lambda_{2,u}\mathrm{e}^{-\int_0^u\lambda_{2,\bar u}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u+\int_{\tau_1}^{\infty}\lambda_{2,u}\mathrm{e}^{-\int_0^u\lambda_{2,\bar u}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u\\&=\int_{t_2}^{\tau_1}(a_2+b_2I_{\{\tau_1\leqslant u\}})\mathrm{e}^{-a_2u-b_2\int_0^uI_{\{\tau_1\leqslant\bar u\}}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u+\\&\quad\int_{\tau_1}^{\infty}(a_2+b_2I_{\{\tau_1\leqslant u\}})\mathrm{e}^{-a_2u-b_2\int_0^uI_{\{\tau_1\leqslant\bar u\}}\mathrm{d}\bar u}\mathrm{d}u\\&=\int_{t_2}^{\tau_1}a_2\mathrm{e}^{-a_2u}\mathrm{d}u+\int_{\tau_1}^{\infty}(a_2+b_2)\mathrm{e}^{-a_2u-b_2(u-\tau_1)}\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-a_2t_2}.\end{aligned}$$

由于 $\tau_1\geqslant t_1, t_1\geqslant t_3$, 可知 $\tau_1\geqslant t_3$, 同理可得 $\int_{t_3}^{\infty}\lambda_{3,v}\mathrm{e}^{-\int_0^v\lambda_{3,\bar v}\mathrm{d}\bar v}\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-a_3t_3}$.

综上, $\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\geqslant t_3\}}|\tau_1\right]=\mathrm{e}^{-a_2t_2-a_3t_3}$, 由此可得

$$\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\geqslant t_1\}}\mathrm{E}[I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\geqslant t_3\}}|\tau_1]\right]=\int_0^{t_1}a_1\mathrm{e}^{-a_1s}\mathrm{e}^{-a_2t_2-a_3t_3}\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{-a_1t_1-a_2t_2-a_3t_3}.$$

上式两端关于 t_1,t_2,t_3 求一阶偏导数, 可得当 $t_1\geqslant t_2\geqslant t_3>0$ 时, $f(t_1,t_2,t_3)=a_1a_2a_3\mathrm{e}^{-a_1t_1-a_2t_2-a_3t_3}$.

同理, 若 $t_3\geqslant t_2$, 当 $t_1\geqslant t_3\geqslant t_2>0$ 时, 可得 $f(t_1,t_2,t_3)=a_1a_2a_3\mathrm{e}^{-a_1t_1-a_2t_2-a_3t_3}$.

3) 当 $0<t_2\leqslant t_1\leqslant t_3$ 时,

$$\begin{aligned}\Pr(\tau_1\geqslant t_1,\tau_2\geqslant t_2,\tau_3\leqslant t_3)&=\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\geqslant t_1\}}I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}\right]\\&=\mathrm{E}\left[I_{\{t_1\leqslant\tau_1<t_3\}}I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}\right]+\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\geqslant t_3\}}I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}\right]\\&=\mathrm{E}\left[I_{\{t_1\leqslant\tau_1<t_3\}}\mathrm{E}[I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}|\tau_1]\right]+\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\geqslant t_3\}}\mathrm{E}[I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}|\tau_1]\right].\end{aligned}$$

当 $t_1\leqslant\tau_1<t_3, t_2\leqslant t_1\leqslant t_3$, 可知 $t_2\leqslant\tau_1<t_3$, 计算可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[I_{\{t_1\leqslant\tau_1<t_3\}}\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}|\tau_1\right]\right]&=\mathrm{e}^{-a_1t_1-a_2t_2}-\mathrm{e}^{-a_2t_2-a_1t_3}-\\&\frac{a_1}{a_1-b_3}\left[\mathrm{e}^{-(a_1-b_3)t_1-a_2t_2-(a_3+b_3)t_3}-\mathrm{e}^{-a_2t_2-(a_1+a_3)t_3}\right].\end{aligned}$$

当 $\tau_1\geqslant t_3, t_2\leqslant t_1\leqslant t_3$, 可知 $t_2\leqslant t_3\leqslant\tau_1$, 可得 $\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\geqslant t_3\}}\mathrm{E}[I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}|\tau_1]\right]=\mathrm{e}^{-a_2t_2-a_1t_3}-\mathrm{e}^{-a_2t_2-(a_1+a_3)t_3}$.

综上,

$$\mathrm{E}\left[I_{\{\tau_1\geqslant t_1\}}I_{\{\tau_2\geqslant t_2\}}I_{\{\tau_3\leqslant t_3\}}\right]=\mathrm{e}^{-a_1t_1-a_2t_2}-\mathrm{e}^{-a_2t_2-(a_1+a_3)t_3}-$$

$$\frac{a_1}{a_1-b_3}\left[\mathrm{e}^{-(a_1-b_3)t_1-a_2t_2-(a_3+b_3)t_3}-\mathrm{e}^{-a_2t_2-(a_1+a_3)t_3}\right],$$

上式两端关于 t_1,t_2,t_3 求一阶偏导数, 可得 $f(t_1,t_2,t_3)=a_1a_2(a_3+b_3)\mathrm{e}^{-(a_1-b_3)t_1-a_2t_2-(a_3+b_3)t_3}$.

4) 同理, 当 $0<t_2\leqslant t_1\leqslant t_3$ 时, 可得 $f(t_1,t_2,t_3)=a_1a_3(a_2+b_2)\mathrm{e}^{-(a_1-b_2)t_1-(a_2+b_2)t_2-a_3t_3}$. 证毕.

定理 1 的证明

由具有多方担保公司债券定价的数学模型(3), 有

$$\begin{aligned}P(t,T)&=\mathrm{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}\left(I_{\{\tau_1>T\}}+I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1<\max\{\tau_2,\tau_3\}\}}+RI_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\max\{\tau_2,\tau_3\}\}}\right)|\mathcal{F}_t\right]\\&=\mathrm{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t\right]-(1-R)\mathrm{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t\right]\mathrm{E}^Q\left[I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\max\{\tau_2,\tau_3\}\}}|\mathcal{F}_t\right].\end{aligned}$$

根据文献[13]中关于随机贴现因子 $\mathrm{E}^Q[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t]$的结果, 可知

$$\mathrm{E}^Q[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t]=A(t,T)\mathrm{e}^{-B(t,T)r_t},$$

其中 $A(t,T)=\left(\dfrac{2\gamma\mathrm{e}^{(\alpha+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right)^{\frac{2\alpha\theta}{\sigma^2}}$, $B(t,T)=\dfrac{2(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\alpha)(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}$, $\gamma=\sqrt{\alpha^2+2\sigma^2}$.

下面求解 $\mathrm{E}^Q\left[I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\max\{\tau_2,\tau_3\}\}}|\mathcal{F}_t\right]$的表达式.

$\mathrm{E}^Q\left[I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\max\{\tau_2,\tau_3\}\}}|\mathcal{F}_t\right]=\mathrm{E}^Q\left[I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\tau_2>\tau_3\}}|\mathcal{F}_t\right]+\mathrm{E}^Q\left[I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\tau_3>\tau_2\}}|\mathcal{F}_t\right]$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^Q\left[I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\tau_2>\tau_3\}}|\mathcal{F}_t\right]&=\mathrm{E}^Q\left[\left(I_{\{\tau_1\leqslant t\}}+I_{\{\tau_2\leqslant t<\tau_1\}}+I_{\{\tau_3\leqslant t<\tau_2\}}+I_{\{\tau_3>t\}}\right)I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\tau_2>\tau_3\}}|\mathcal{F}_t\right]\\&=I_{\{\tau_1\leqslant t\}}I_{\{\tau_1>\tau_2>\tau_3\}}+\mathrm{E}^Q\left[I_{\{t<\tau_1\leqslant T,0<\tau_3<\tau_2\leqslant t\}}+\right.\\&\quad\left.I_{\{\tau_1\leqslant T,t<\tau_2<\tau_1,0<\tau_3\leqslant t\}}+I_{\{T\geqslant\tau_1>\tau_2>\tau_3>t\}}|\mathcal{F}_t\right.\\&=I_{\{\tau_1\leqslant t\}}I_{\{\tau_1>\tau_2>\tau_3\}}+I_{\{\tau_1>t,\tau_2\leqslant t,\tau_3<t\}}\frac{\Pr(t<\tau_1\leqslant T,0<\tau_3<\tau_2\leqslant t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_2\leqslant t,\tau_3<t)}+\\&\quad I_{\{\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3\leqslant t\}}\frac{\Pr(\tau_1\leqslant T,t<\tau_2<\tau_1,0<\tau_3\leqslant t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3\leqslant t)}+\\&\quad I_{\{\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3>t\}}\frac{\Pr(T\geqslant\tau_1>\tau_2>\tau_3>t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3>t)}.\end{aligned}\tag{A1}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^Q\left[I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\tau_3>\tau_2\}}|\mathcal{F}_t\right]&=I_{\{\tau_1\leqslant t\}}I_{\{\tau_1>\tau_3>\tau_2\}}+I_{\{\tau_1>t,\tau_2<t,\tau_3\leqslant t\}}\frac{\Pr(t<\tau_1\leqslant T,0<\tau_2<\tau_3\leqslant t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_2<t,\tau_3\leqslant t)}+\\&I_{\{\tau_1>t,\tau_3>t,\tau_2\leqslant t\}}\frac{\Pr(\tau_1\leqslant T,t<\tau_3<\tau_1,0<\tau_2\leqslant t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_3>t,\tau_2\leqslant t)}+I_{\{\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3>t\}}\frac{\Pr(T\geqslant\tau_1>\tau_3>\tau_2>t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3>t)}.\end{aligned}\tag{A2}$$

由式(A1)和式(A2), 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}^Q\left[I_{\{\tau_1\leqslant T\}}I_{\{\tau_1>\max\{\tau_2,\tau_3\}\}}|\mathcal{F}_t\right]=I_{\{\tau_1\leqslant t\}}I_{\{\tau_1>\max\{\tau_2,\tau_3\}\}}+\\&I_{\{\tau_1>t,\max\{\tau_2,\tau_3\}\leqslant t\}}\frac{\Pr(t<\tau_1\leqslant T,0<\tau_2<\tau_3\leqslant t)+\Pr(t<\tau_1\leqslant T,0<\tau_3<\tau_2\leqslant t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_2<t,\tau_3<t)}+\\&I_{\{\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3\leqslant t\}}\frac{\Pr(\tau_1\leqslant T,t<\tau_2<\tau_1,0<\tau_3\leqslant t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3\leqslant t)}+\\&I_{\{\tau_1>t,\tau_3>t,\tau_2\leqslant t\}}\frac{\Pr(\tau_1\leqslant T,t<\tau_3<\tau_1,0<\tau_2\leqslant t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_3>t,\tau_2\leqslant t)}+\\&I_{\{\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3>t\}}\frac{\Pr(T\geqslant\tau_1>\tau_2>\tau_3>t)+\Pr(T\geqslant\tau_1>\tau_3>\tau_2>t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_2>t,\tau_3>t)}.\end{aligned}$$

由 τ_1,τ_2,τ_3 联合违约概率密度表达式(4), 计算可得

$$\frac{\Pr(t<\tau_1\leqslant T,0<\tau_2<\tau_3\leqslant t)+\Pr(t<\tau_1\leqslant T,0<\tau_3<\tau_2\leqslant t)}{\Pr(\tau_1>t,\tau_2<t,\tau_3<t)}=\left(1-\mathrm{e}^{-a_1(T-t)}\right),$$

$$\frac{\Pr(\tau_1 \leqslant T, t < \tau_2 < \tau_1, 0 < \tau_3 \leqslant t)}{\Pr(\tau_1 > t, \tau_2 > t, \tau_3 \leqslant t)} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}\mathrm{e}^{-(a_1+a_2)(T-t)} - \mathrm{e}^{-a_1(T-t)} + \frac{a_2}{a_1 + a_2},$$

$$\frac{\Pr(\tau_1 \leqslant T, t < \tau_3 < \tau_1, 0 < \tau_2 \leqslant t)}{\Pr(\tau_1 > t, \tau_3 > t, \tau_2 \leqslant t)} = \frac{a_1}{a_1 + a_3}\mathrm{e}^{-(a_1+a_3)(T-t)} - \mathrm{e}^{-a_1(T-t)} + \frac{a_3}{a_1 + a_3},$$

$$\frac{\Pr(T \geqslant \tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > t) + \Pr(T \geqslant \tau_1 > \tau_3 > \tau_2 > t)}{\Pr(\tau_1 > t, \tau_2 > t, \tau_3 > t)} = \frac{2a_1 + a_2 + a_3}{a_1 + a_2 + a_3} - \frac{a_1}{a_1 + a_2 + a_3}\mathrm{e}^{-(a_1+a_2+a_3)(T-t)} -$$

$$\mathrm{e}^{-a_1(T-t)} - \frac{a_1}{a_1 + a_2}\left[1 - \mathrm{e}^{-(a_1+a_2)(T-t)}\right]\mathrm{e}^{a_3 t} - \frac{a_1}{a_1 + a_3}\left[1 - \mathrm{e}^{-(a_1+a_3)(T-t)}\right]\mathrm{e}^{a_2 t}.$$

综上, 可求得多方担保债券价格 $P(t,T)$ 解的显式表达式(5). 证毕.

****

(上接第 631 页)

[25] 王秀国, 张秦波, 刘　涛. 基于风险因子的风险平价投资策略及实证研究. 投资研究, 2016(12): 65–78.
Wang X G, Zhang Q B, Liu T. A risk parity investment strategy based on risk factors. Investment Research, 2016(12): 65–78. (in Chinese)

[26] Kamenshchikov S, Drozdov I. Naive risk parity portfolio with fractal estimation of volatility. Social Science Electronic Publishing, 2017.

[27] Chaves D B, Hsu J C, Li F, et al. Efficient algorithms for computing risk parity portfolio weights. Journal of Investing, 2012, 21(3): 150–163.

[28] Longerstaey J, Spencer M. Riskmetricstm-technical Document. New York: Morgan Guaranty Trust Company of New York, 1996, 51–54.

作者简介:

赵大萍(1987—), 女, 山东临沂人, 博士, 副教授, 研究方向: 投资组合优化, Email: zhaodaping@cueb.edu.cn;

房　勇(1974—), 男, 山东聊城人, 博士, 副研究员, 研究方向: 投资组合优化, 金融风险管理, Email: yfang@amss.ac.cn.