

矩形截面超导线圈的径高比对最大 磁场点位置和幅值的影响分析

朱英伟[†], 玄永伟, 王鹏, 刘雪山, 聂妮纳, 雷勇

四川大学电气工程学院, 成都 610065

收稿日期: 2020-11-16; 接收日期: 2021-11-10

【摘要】 为了充分利用超导线材的载流能力, 需要精确计算超导线圈产生的最大磁场值, 还需要明确最大磁场值所处的具体位置. 其中, 最大磁场点的位置主要由线圈的形状(径高比)决定. 本文基于单积分法并通过 MATLAB 编程, 将矩形截面线圈的径高比 α 和 β 参数化, 计算分析线圈内壁边上和端面边上各点磁场的变化趋势. 同时, 利用电磁场有限元软件 ANSYS, 对矩形截面线圈的空间磁场进行仿真分析, 得到线圈的内壁磁场系数、端面磁场系数和最大磁场系数随 α 和 β 的变化规律; 进而, 计算并寻找到了线圈截面上最大磁场点的位置和幅值. 综合分析表明, 线圈内壁边上的最大磁场点并不是始终位于内壁中点 B_c 处, 而是可能偏离端点 B_c 一小段距离的某点 $(a_1, b-\delta)$ 处; 线圈端面边上的最大磁场点一定不位于端点 B_c 处, 而是偏离端点 B_c 一小段距离的某点 $(a_1+\delta, b)$ 处. 本文给出了线圈截面上最大磁场系数 K_{mc} 对应于线圈径高比 (α, β) 变化的等高曲线, 矩形截面超导线圈最大磁场值可以通过计算内壁中点的磁场值与最大磁场系数的乘积获得.

关键词: 超导线圈; 径高比; 最大磁场; 单积分法

PACS: 07.55.Db, 07.55.Ge, 47.11.Fg, 75.40.Mg

DOI: 10.13380/j.ltpl.2021.03.009

Analysis of the Position and Amplitude of the Maximum Magnetic Field in the Rectangular Cross-section Superconducting Coil with Different Aspect Ratio

ZHU Yingwei, XUAN Yongwei, WANG Peng, LIU Xueshan, NIE Nina, LEI Yong

Sichuan University, School of Electrical Engineering, Chengdu 610065

Received date: 2020-11-16; accepted date: 2021-11-10

【Abstract】 For making full use of the current-carrying capacity of the superconducting wires, it is necessary to accurately calculate the maximum magnetic field generated by the superconducting coil, and to clarify the specific location of the maximum magnetic field. The position of the maximum magnetic field is mainly determined by the shape of the coil (Aspect ratio). Based on the single integration method and MATLAB programming, this paper parameterizes the α and β of the rectangular cross-section coil, calculates and analyzes the change of the magnetic field at each point on the inner wall and end edge of the coil. The FEM software ANSYS was used to simulate and analyze the magnetic field of the rectangular cross-section coil, and obtain inner wall magnetic field coefficient, end

* 国家自然科学基金项目(51977134)资助的课题.

[†] zhu-yingwei@163.com

edge magnetic field coefficient, maximum magnetic field coefficient of the coil with different α and β . The position and amplitude of the maximum magnetic field were calculated and found on the coil cross-section. Comprehensive analysis shows that the maximum magnetic field on the inner wall is not always located at the midpoint B_c of the inner wall, but at a certain point $(a_1, b-\delta)$ that may deviate from the endpoint B_c a small distance δ ; the maximum magnetic field point on the end edge of the coil must not be located at the endpoint B_c , but at a certain point $(a_1 + \delta, b)$ deviated from the endpoint B_c a small distance δ . This paper gives the contour curve of the maximum magnetic field coefficient K_{mc} with different α and β , the maximum magnetic field value of the rectangular cross-section superconducting coil can be obtained by calculating the product of the magnetic field at the midpoint of the inner wall and the maximum magnetic field coefficient.

Keywords: Superconducting coil; Aspect ratio; Maximum magnetic field; Single integration method

PACS: 07.55.Db, 07.55.Ge, 47.11.Fg, 75.40.Mg

DOI: 10.13380/j.ltpl.2021.03.009

Reference method: ZHU Yingwei, XUAN Yongwei, WANG Peng, LIU Xueshan, NIE Nina, LEI Yong, Low. Temp. Phys. Lett. **43**, 0200 (2021)

1 引言

超导磁储能系统(SMES)是利用超导线圈将电能转换为磁场能存储起来,应用在电力系统中,可以消除互联电力系统中的低频振荡,抑制次同步谐振和振荡.超导储能线圈是 SMES 的核心部件,其设计目标是:在材料特性的限定下,以最小的经济成本,获得最大的电能存储容量.考虑思路:一是尽量增大超导线圈的电感值,二是尽量提高超导线圈的运行电流.对于近似各向同性的低温超导 NbTi 线材,短样超导线的运行电流大小受超导体的临界电流特性曲线 J - B 关系制约,而 NbTi 超导线圈的最大工作电流 I_c 取决于线圈产生的最大磁场 B_m .因此,在设计低温超导线圈时,为了充分利用超导线材的载流能力,需要精确计算超导线圈产生的最大磁场值 B_m ,同时,还需要明确最大磁场值所处的具体位置 P_m ,从而才能设计安全高效的运行电流,降低超导线圈的失超风险,保障超导储能磁体能够稳定运行和可靠工作.

超导储能线圈的结构主要有直螺线管型和环型.直螺线管型超导线圈的结构简单、绕制方便、储能利用率高,一般作为常用类型.对于密绕的矩形截面超导螺线管线圈,其最大磁场点的幅值由线圈的工作电流和线圈的结构决定,而最大磁场点的位置主要由线圈的结构尺寸决定.通常是设定线圈内半径 a_1 后,考虑半径比 α 和高径比 β 对最大磁场点的影响.目前,在轴对称线圈磁场的计算方面已有了各种的研究成果^[1],但关于矩形截面超导线圈不同径高比对最大磁场点位置和幅值的影响的研究却还不够详尽.本文使用 MATLAB 软件结合单积分法^[7],将超导线圈尺寸参数化,分析不同径高比对最大磁场点位置和数值的影响趋势.同时,利用 ANSYS 电磁场有限元仿真软件,对不同径高比下线圈磁场的内壁系数、端面系数和最大磁场系数进行分析.

2 磁场计算方法

矩形截面轴对称线圈所产生的磁场,除了中心轴线上和中截面上的点以外,空间其他任意一点处的磁场很难用简洁的解析式直接给出.目前,轴对称线圈磁场计算的方法有很多,常用的主要是基于勒让德函数展开的级数表达式、采用椭圆积分的 Bartky 变换法、基于电流丝磁场的二重积分法、利

用坐标归算的累次单积分法、基于矢量磁位积分变换的快速算法,以及基于贝塞尔函数和超几何函数的级数法.在这些方法中,单积分法速度稍慢但精度较高,且编程容易,因此本文利用单积分法对矩形截面超导线圈的磁场进行计算,并寻找最大磁场点的位置.

2.1 单积分法

假设有一矩形截面超导线圈的内半径为 a_1 ,外半径为 a_2 ,半高长为 b ,对应的半径比为 $\alpha = a_2/a_1$,高径比为 $\beta = b/a_1$,线圈截面的载流密度为 J .设圆柱坐标系的 z 轴位于线圈的对称轴,线圈的中截面位于 xoy 平面.取线圈的轴向剖面如图 1 所示,现分析空间任意一点处的磁场,令所求场点 P 坐标为 (ρ, z) .

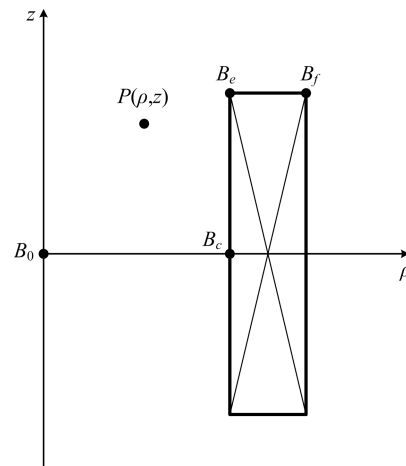


图 1 矩形截面超导线圈的剖面图

Fig. 1 Sectional view of a rectangular cross-section superconducting coil

以点 $P(\rho, z)$ 的径向坐标 ρ 为基准值,对线圈的结构参数归算: $A_1 = a_1/\rho, A_2 = a_2/\rho, Z_1 = -(b+z)/\rho, Z_2 = (b-z)/\rho, A = \rho'/\rho, Z = z'/\rho, \omega = \mu_0 J \rho / (2\pi)$,根据毕奥萨伐尔定律,计算空间任意一点的磁场.由分部积分变换,对变量 A, Z 进行累次积分,可得点 P 处的径向磁场 B_ρ 和轴向磁场 B_z :

$$B_\rho(\rho, z) = \omega [F_\rho(A_2, Z_2) - F_\rho(A_2, Z_1) - F_\rho(A_1, Z_2) + F_\rho(A_1, Z_1)] \quad (1)$$

$$B_z(\rho, z) = \omega [F_z(A_2, Z_2) - F_z(A_2, Z_1) - F_z(A_1, Z_2) + F_z(A_1, Z_1)] \quad (2)$$

函数 F_ρ 和 F_z 在 $z \geq 0$ 时表达式为:

$$F_\rho(A, Z) = \int_0^\pi [R + \cos\theta \ln(R + A - \cos\theta)] \cos\theta d\theta \quad (3)$$

$$F_z(A, Z) = \int_0^\pi \left\{ Z \ln(R + A - \cos\theta) + \frac{1}{2} \cos\theta \ln\left(\frac{R+Z}{R-Z}\right) - \sin\theta \arctan\left[\frac{Z(A - \cos\theta)}{R \sin\theta}\right] \right\} d\theta \quad (4)$$

其中,

$$R = \sqrt{1 + A^2 - 2A \cos\theta + Z^2} \quad (5)$$

考虑瑕点的存在,分区域对瑕点进行转移得:

$$F_\rho(A, Z) = \begin{cases} \int_0^\pi [R + \cos\theta \ln(R + A - \cos\theta)] \cos\theta d\theta, & A > 1, Z = 0 \\ -1.04226018\dots, & A = 1, Z = 0 \\ -\frac{\pi}{4}(1 + \ln 4) + \int_0^\pi [R + \cos\theta \ln\left(\frac{R+A+1}{R+1-A}\right)] \cos\theta d\theta & A < 1, Z = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$F_z(A, Z) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2A} + \int_0^\pi \left\{ Z \ln(R + A - \cos\theta) - \cos\theta \ln(R + Z) - \sin\theta \arctan\left[\frac{Z(A - \cos\theta)}{R \sin\theta}\right] \right\} d\theta, & A > 1 \\ -\frac{\pi A}{2} + \int_0^\pi \left\{ Z \ln(R + A - \cos\theta) - \cos\theta \ln(R + Z) - \sin\theta \arctan\left[\frac{Z(A - \cos\theta)}{R \sin\theta}\right] \right\} d\theta, & A \leq 1 \end{cases} \quad (7)$$

当径向坐标 $\rho = 0$ 时,即计算线圈中心轴线上各点的磁场:

$$B_\rho(0, z) = 0 \quad (8)$$

$$B_z(0, z) = \frac{\mu_0 J}{2} \left[(b - z) \ln \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + (b - z)^2}}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + (b - z)^2}} + (b + z) \ln \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + (b + z)^2}}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + (b + z)^2}} \right] \quad (9)$$

由此,将函数 $F_\rho(A, Z)$ 和 $F_z(A, Z)$ 转变为初等函数的定积分,通过数值计算方法可以得到线圈空间中任一点处的磁场分布值.

在线圈剖面图 1 中标定三个重要点磁场: B_0 为中心点磁场, B_c 为内壁中点磁场, B_e 为端点磁场. 标定两条重要边线: $B_c B_e$ 为内壁边线, $B_e B_f$ 为端面边线.

基于毕奥萨伐尔定律计算分析轴对称圆柱线圈的磁场,可知:磁场的径向分量是关于 z 的奇函数,磁场的轴向分量是关于 z 的偶函数. 再根据圆柱线圈结构的对称性和磁场的叠加原理,基于数值计算的实践表明,矩形截面超导线圈产生的最大磁场只能位于内壁边线 $B_c B_e$ 或端面边线 $B_e B_f$ 上,不会存在线圈截面内部. 多数情况下,最大磁场点 B_m 可位于内壁中点 B_c 处. 本文分析矩形截面超导线圈的磁场,取内半径 a_1 为定值,考虑半径之比 α 和半高之比 β 对最大磁场点的位置和幅值的影响规律.

3 基于 MatLab 的数值分析

设定矩形截面超导线圈的内半径 a_1 为 1m,线圈截面载流密度 J 为 10^8 A/m^2 ,利用单积分公式

编写 MatLab 磁场计算程序. 首先分析线圈内壁边上的磁场与半径比 α 的变化关系,选取线圈半高比 $\beta=2$ 为定值,考虑半径比 α 在区间 $(1.01, 1.08)$ 范围内变化,改变步长为 0.01. 考虑到圆柱线圈的轴对称性,为了节省计算时间,这里仅分析线圈四分之一空间的磁场幅值.

图 2 所示为线圈内壁边线 $B_c B_e$ 上各点的磁场幅值随半径比 α 变化的趋势图. 可以发现,当 $\alpha = 1.08$ 时,内壁边上的最大磁场点位于内壁中点 B_c 处. 当 $\alpha = 1.01$ 时,内壁边上的最大磁场点靠近于端点 B_e 处. 进一步地细化 α 值分析可知,当 $\beta=2, \alpha \geq 1.026$ 时,内壁边上的最大磁场点位于内壁中点 B_c 处. 当 $\beta=2, \alpha \leq 1.024$ 时,内壁边上的最大磁场点靠近于端点 B_e 处,位置坐标为 $(a_1, b - \delta)$,其中, δ 为偏离端点 B_e 的一小值.

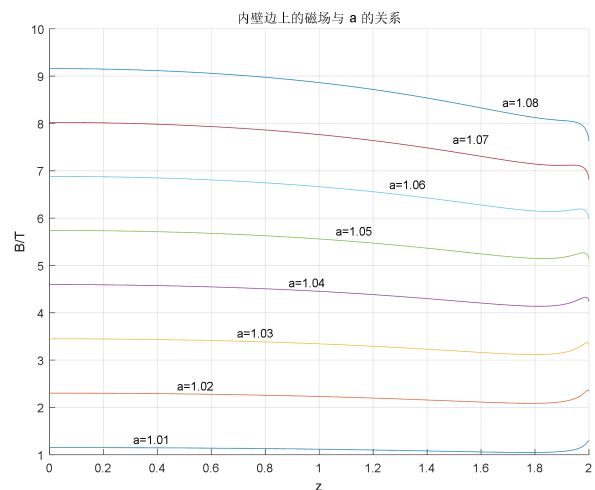


图 2 内壁边上的磁场随半径比 α 变化的趋势

图3所示为线圈内壁边线 $B_c B_e$ 上各点的磁场幅值随高径比 β 变化的趋势. 选取线圈半径比 $\alpha = 1.04$ 为定值, 高径比 β 在区间 $(0.2, 2)$ 范围内变化, 改变步长为 0.1. 可以发现, 当 $\beta = 2$ 时, 内壁边上的最大磁场点位于内壁中点 B_c 处. 当 $\beta = 0.2$ 时, 内壁边上的最大磁场点靠近于端点 B_e 处. 进一步地细化 β 值分析可知, 当 $\alpha = 1.04, \beta \geq 1.18$ 时, 内壁边上的最大磁场点位于内壁中点 B_c 处. 当 $\alpha = 1.04, \beta \leq 1.16$ 时, 内壁边上的最大磁场点靠近于端点 B_e 处, 位于点 $(a_1, b - \delta)$.

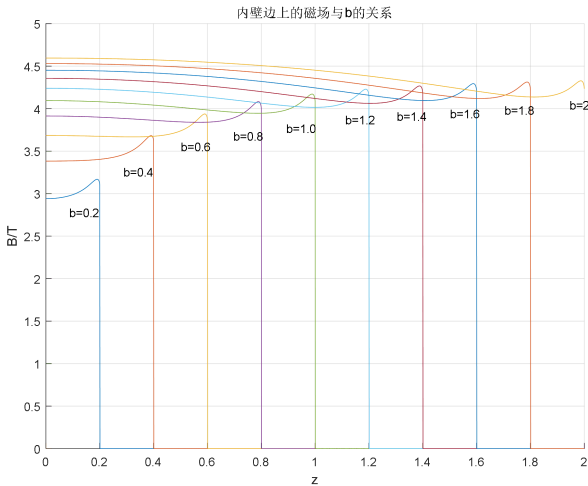


图3 内壁边上的磁场随高径比 β 变化的趋势

图4、图5分别为线圈端面边线 $B_e B_f$ 上各点的磁场幅值, 随半径比 α 和高径比 β 变化的趋势. 可以发现, 端面边上的最大磁场点靠近端点 B_e 处, 具体位置坐标为 $(a_1 + \delta, b)$.

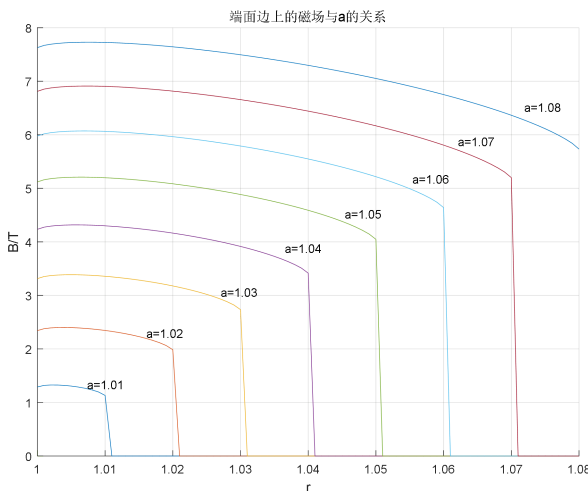


图4 端面边上的磁场随半径比 α 变化的趋势

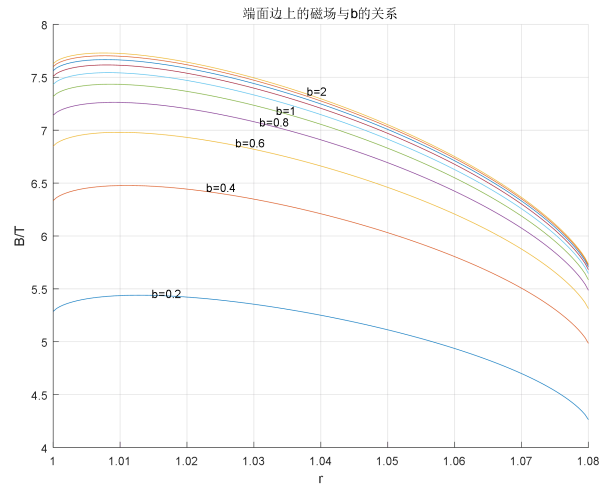


图5 端面边上的磁场随高径比 β 变化的趋势

综上计算分析表明, 线圈内壁边上的最大磁场点可能位于内壁中点 B_c 处, 或者是偏离端点 B_e 一小段距离的某点 $(a_1, b - \delta)$ 处, 具体位置点与径高比值 α 和 β 有关系. 线圈端面边上的最大磁场点一定不位于端点 B_e 处, 而是偏离端点 B_e 一小段距离的某点 $(a_1 + \delta, b)$ 处.

4 基于 ANSYS 有限元仿真分析

采用有限元软件 ANSYS 的静磁场计算模块, 对不同径高比线圈的磁场进行参数化仿真分析. 设定线圈的内半径 $a_1 = 1$ m, 截面载流密度 $J = 10^8$ A/m², 将线圈半径比和高径比参数化, 考虑 $\alpha \in (1.01, 1.09), \beta \in (0.1, 2)$, 仿真计算误差设定为 0.01%. 当 $\alpha = 1.06, \beta = 0.4$ 时, 在 Ansys 程序中建立轴对称线圈 1/4 区域模型, 经过多次自适应网格剖分和有限元迭代计算, 仿真得到线圈截面磁感应强度的云势图如图 6 所示.

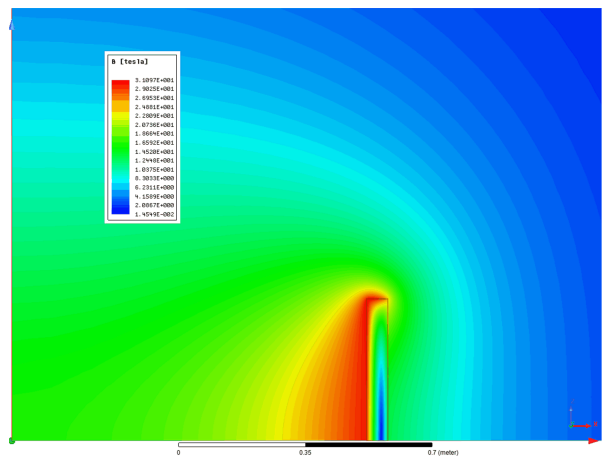


图6 矩形截面线圈 1/4 区域磁感应强度分布图

在 Ansys 后处理程序中,利用场计算器编辑变量和表达式,可以计算并找出线圈内壁中点处的磁场值 B_c ,内壁边上的最大磁场值 B_{am} 、端面边上的最大磁场值 B_{bm} .以线圈内壁中点处的磁场值作为基准值,定义以下四个磁场系数:

$$K_{ac} = \frac{B_{am}}{B_c} \quad (10)$$

$$K_{bc} = \frac{B_{bm}}{B_c} \quad (11)$$

$$K_{mc} = \frac{\max(B_{am}, B_{bm})}{B_c} \quad (12)$$

利用 Ansys 中的参数化分析功能,改变径高比 α 、 β 值,计算并寻找内壁边上和端面边上的最大磁场值,进而分别计算 K_{ac} 、 K_{bc} 、 K_{mc} 的值.有限元参数化仿真计算结果如图 7、8、9 所示.

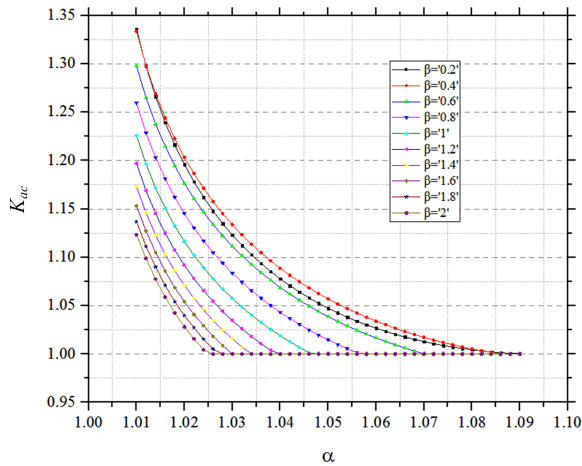


图 7 内壁磁场系数 K_{ac} 随 α 、 β 的变化

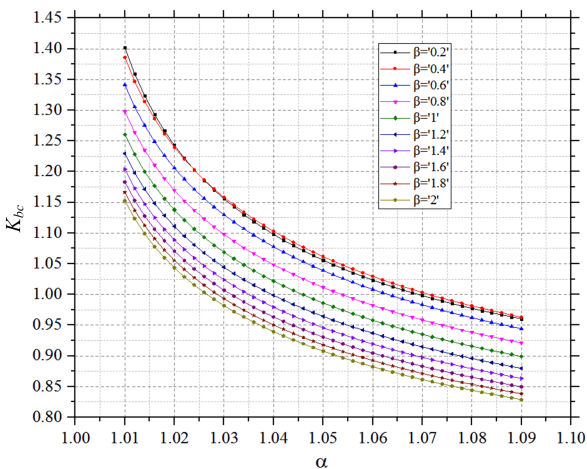


图 8 端面磁场系数 K_{bc} 随 α 、 β 的变化

图 7 仿真结果表明,内壁磁场系数 $K_{ac} \geq 1$. 当

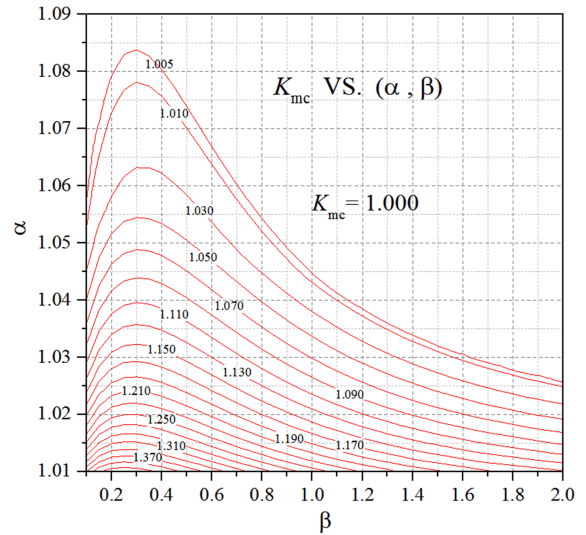


图 9 最大磁场系数 K_{mc} 随 α 、 β 变化的等高线

$K_{ac} > 1$ 时,说明内壁最大磁场点不是位于内壁中点;当 $K_{ac} = 1$ 时,说明此时的内壁最大磁场点位于内壁中点.可以发现,当 $\beta = 1$, $\alpha > 1.046$ 时,最大磁场点将始终位于内壁中点.图 8 仿真结果表明,端面磁场系数 K_{ac} 或大于 1,或小于 1,说明线圈端面可能存在比内壁中点磁场值大的情况.

图 9 为线圈最大磁场系数 K_{mc} 随 α 、 β 变化的等高线.分析结果表明,当点 (α, β) 位于包络线 $K_{mc} = 1.005$ 上面时,即 $K_{mc} = 1$,说明最大磁场点位于内壁中点.当点 (α, β) 位于包络线 $K_{mc} = 1.005$ 下面时,即 $K_{mc} > 1$,说明最大磁场点不在内壁中点.可以发现,线圈最大磁场值可以超过内壁中点处磁场值 37%.线圈最大磁场值与内壁中点磁场的比值 K_{mc} ,可由线圈的形状系数 (α, β) 在等值曲线中标定或插值求出.

为了更加直观地比较出线圈内壁边线和端面边线上各点的磁场大小,选定这两条边线连成一体作为考虑对象,计算边线上各点处的磁场幅值,并寻找最大磁场点.采用参数化有限元仿真计算,所得结果如图 10 和图 11 所示,图中横坐标为内壁边线加上端面边线上的各点,纵坐标为不同厚度 a 时的磁场幅值,其中最大磁场值已标定出位置.

从图 10 和图 11 仿真结果可以发现,当 $\beta = 0.3$, $\alpha > 1.056$ 时,线圈最大磁场点位于内壁边上,且靠近于端点;当 $\alpha < 1.056$ 时,线圈最大磁场点位于端面边上,且靠近于端点.此时,最大磁场位置在端点 B_e 附近的变化是渐变过程.而当 $\beta = 1$, $\alpha >$

1.046 时,线圈最大磁场点位于内壁中点; $\alpha < 1.046$ 时,线圈最大磁场点位于端面边上且靠近于端点. 此

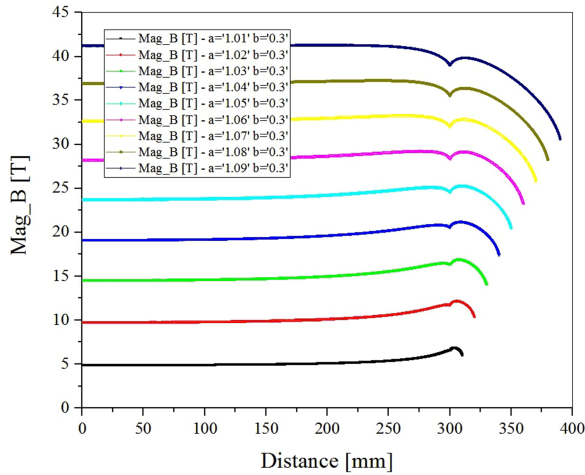


图 10 内壁和端面边上最大磁场点位置随 α 的变化趋势($\beta=0.3$)

时,最大磁场从内壁中点 B_c 切换到端点 B_e 附近是突变过程.

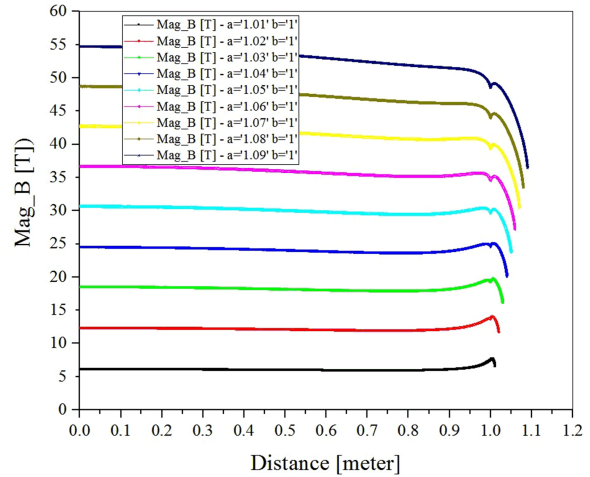


图 11 内壁和端面边上最大磁场点位置随 α 的变化趋势($\beta=1$)

综上所述和分析可以知,矩形截面超导线圈的最大磁场点主要位于两个区域,一个是内壁中点 B_c 处,另一个是靠近于端点 B_e 的附近处($a_1, b - \delta$)和($a_1 + \delta, b$),其中 δ 为偏离端点 B_e 的一小值. 最大磁场点的具体位置由线圈的形状系数(α, β)决定,最大磁场幅值的计算可以通过内壁中点的磁场值 B_c 乘以最大磁场系数 K_{mc} 获得.

5 结 论

矩形截面超导线圈产生的最大磁场点并不一定位于内壁中点 B_c ,也不位于端点 B_e 处. 本文基于单积分法,通过 MatLab 编程,计算分析线圈内壁边上和端面边上的磁场,随径高比 α 和 β 的变化规律. 同时,利用 ANSYS 电磁场有限元软件,对矩形截面线圈空间的磁场进行仿真分析,得到线圈内壁磁场系

数、端面磁场系数和最大磁场系数随 α 和 β 的变化趋势;在线圈内壁上和端面边上,计算并分析了最大磁场点的位置随径高比的变化趋势.

结果表明,线圈内壁边上的最大磁场点可能位于内壁中点 B_c 处,或者是偏离端点 B_e 一小段距离的某点($a_1, b - \delta$)处;线圈端面边上的最大磁场点一定不位于端点 B_e 处,而是偏离端点 B_e 一小段距离的某点($a_1 + \delta, b$)处. 最大磁场点的位置由线圈径高比值 α 和 β 决定. 线圈最大磁场值与内壁中点磁场的比值 K_{mc} ,由线圈的形状系数(α, β)确定并构成等高曲线. 可以发现,线圈最大磁场值可以超过内壁中点处磁场值 37%. 给定线圈形状系数(α, β)后,线圈最大磁场值 B_m 可以通过内壁中点的磁场值 B_c 乘以最大磁场系数 K_{mc} 获得.

参 考 文 献

[1] P. Walstrom, M. Lubell, *J. Appl. Phys.*, **44** (1973), 4195.
 [2] P. Walstrom, M. Lubell, *J. Appl. Phys.*, **46** (1975), 2812.
 [3] M. Daumling, R. Flukiger, *Cryogenics*, **35** (1995), 867.
 [4] Y. Ji, W. He, G. Wu, *Adv. Tech. Elec. Eng. Nrg.*, **34** (2015), 75.
 [5] X. Zhu, Q. Wang, H. Wang, *Adv. Tech. Elec. Eng. Nrg.*, **35** (2016), 43.
 [6] X. Wang, S. Wei, C. Chen, *Adv. Tech. Elec. Eng. Nrg.*, **35** (2016), 75.
 [7] Y. Lei, Q. Li, *J. Xian Jiaotong Univ.*, **23** (1989), 109.
 [8] L. Forbes, S. Crozier, D. Doddrell, *IEEE Trans. Magn.*, **33** (1997), 4405.
 [9] Y. Lei, Calculation of Axisymmetric Coil Magnetic Field (Beijing: China Metrology Press), **120** (1991).
 [10] Q. Li, W. Yang, *Adv. Tech. Elec. Eng. Nrg.*, **15** (1996), 7.