

基于鲁棒优化的新增设施选址策略研究

罗太波¹, 赵阳¹, 于江霞^{1*}, 李红梅²

(1. 西安电子科技大学经济与管理学院, 陕西 西安 710126;

2. 西北大学经济管理学院, 陕西 西安 710127)

摘要: 在需求无概率分布的条件下, 将区间数据作为需求上下界, 以所有设施中最大负荷量最小化为目标, 基于鲁棒优化方法, 采用最小最大后悔准则, 在就近服务假设下建立新增设施选址优化模型. 基于最坏情景分析, 证明了最坏情景具有特殊的结构特征, 设计了使最大负荷量的最大后悔值最小的求解算法. 研究结果克服了求解时间复杂度会随需求点数量的增加而呈指数增长的缺点, 把已有的时间复杂度为指数的求解算法改进到多项式时间求解. 算例分析结果进一步表明本文算法更适合大规模网络上的新增设施选址问题.

关键词: 新增设施选址; 最大负荷量; 最小最大后悔值; 算法设计与分析

中图分类号: O224; TP399 文献标识码: A 文章编号: 1000-5781(2021)05-0612-13

doi: 10.13383/j.cnki.jse.2021.05.004

Study on location strategy of new facilities based on robust optimization

Luo Taibo¹, Zhao Yang¹, Yu Jiangxia^{1*}, Li Hongmei²

(1. School of Economics and Management, Xidian University, Xi'an 710126, China;

2. School of Economics and Management, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: Under the condition that the demand has no probability distribution, interval data is taken as the upper and lower bounds of the demand, aiming at minimizing the maximum load in all facilities. Based on the robust optimization method, the minimum-maximum regret criterion is adopted to establish the optimization model of new facility location under the nearby service hypothesis. Based on worst-case scenario analysis, it is proved that the worst-case scenario has special structural characteristics, and an algorithm is designed to minimize the maximum regret value of the maximum load. The result overcomes the shortcoming that the solution time complexity will increase exponentially with the increase of the number of demand points, and improves the existing solution algorithm with exponential time complexity to polynomial time solution example analysis results further show that the algorithm proposed in this paper is more suitable for the new facility location problem on large-scale network.

Key words: location of new facilities; maximum load; minmax regret; algorithm design and analysis

1 引言

城市人口规模的不断扩大致使许多相关设施长期处于高负荷运转状态. 由于城市规划和建筑容量限制

收稿日期: 2020-07-11; 修订日期: 2021-06-24.

基金项目: 教育部人文社会科学研究资助项目(18YJC630114; 20YJZAH123); 教育部基本科研业务费资助项目(JB210603);

国家自然科学基金资助项目(71701162); 陕西省自然科学基金资助项目(2019JQ-079; 2019JQ-154; 2020JM-211);

中国博士后科学基金资助项目(2017M613192).

*通信作者

等原因,通过对现有设施进行扩建或改造的方法已很难彻底改变高负荷的运行状态,只能通过增加新设施的方式来分担和均衡各个服务点的负荷量.由于新增设施的选址将直接影响需求点人流的去向,进而改变系统中各个设施的负荷量,因此在考虑新增设施的选址问题时须考虑已有设施的影响.此外,由于城市布局和人口的不断变化,很难准确获得各个需求点的需求量,甚至无法估计出有效的需求概率分布,只能确定其变化范围.在这种情形下,如何为新增设施进行优化选址,从而最小化所有设施的最大负荷量,成为了急需解决的问题.本文将采用鲁棒优化的方法研究需求量为区间值的新增设施选址问题,在最小最大负荷量的目标下,设计基于最小最大后悔准则的选址方案.

根据是否考虑已有设施的影响,设施的选址模型可划分为两种类型:一类是传统的设施选址模型,指在为新设施选址时不需要考虑旧设施的影响,或默认系统中不存在旧设施;另一类是新增设施选址模型,指在选址时需要考虑旧设施对新增设施的影响.传统设施选址模型主要包括中心选址模型,中值选址模型和覆盖选址模型.当信息确定时,相关研究主要以设计对应的求解策略来使得目标值最优.当信息不确定性时,一部分研究采用概率分布的方法寻求期望意义下的最优,另一部分则建立相对应的鲁棒优化选址模型.

传统设施选址研究中,最早将最小最大后准则运用于选址研究的是 Kouvelis 等^[1],针对树图上的 1-中值选址问题,设计了时间复杂度($O(n^4)$)的多项式算法.接着, Averbakh 等^[2,3]进一步提出了时间复杂度为 $O(n^2)$ 和 $O(n \log^2 n)$ 的求解算法.与此同时, Averbakh 等^[2]把单点选址的中值问题从树图上扩展到一般图上,设计了时间计算复杂度为 $O(mn^2 \log n)$ 的求解算法.而后, Yu 等^[4]进一步把树网图中的 1-中值选址问题的时间复杂度 $O(n \log^2 n)$ 改进到 $O(n \log n)$,把一般网络图上 1-中值问题的复杂度由 $O(mn^2 \log n)$ 改进到 $O(mn^2 + n^3 \log n)$. Brodal 等^[5]运用不同的方法同样得到了树图上 1-中值选址问题时间复杂度为 $O(n \log n)$ 的求解算法.针对中心选址问题, Averbakh 等^[6]通过在辅助网络图上的等价变换,把权重为区间值的 p -中心选址问题转换为 $n + 1$ 个确定权重的 p -中心选址问题,进而设计了时间计算复杂度为 $O(mn^2 \log n)$ 的求解算法.当考虑树图时, Averbakh 等^[7]则提出时间复杂度为 $O(n^2)$ 的求解算法.后来, Yu 等^[4]将一般网络图上 1-中心选择问题的时间复杂度降低为 $O(mn \log n)$,将树图上 1-中心选址问题的复杂度改进为 $O(n \log^2 n)$.针对覆盖问题, Berman 等^[8]在满足相关条件下,把逐次覆盖问题等价于求解基于鲁棒优化下中值选址问题,进而设计了时间复杂度为 $O(n^4 l^2)$ 的多项式算法. Baldomero-Naranjo 等^[9]考虑了边长为区间值的最大覆盖问题,设计了两个多项式时间复杂度的算法来求解单个设施的最大覆盖选址问题.针对组合目标,最近 Li 等^[10]则考虑了中心和中值组合目标下的选址模型,设计了时间复杂度为 $O(n^3 \log n)$ 的求解算法.此外,近年来产生了一批基于新应用背景的鲁棒优化选址研究,如避难所选址问题^[11,12], Hub 选址问题^[13] 和海洋溢油应急选址^[14]等.在选址问题之外,鲁棒优化方法运用也非常广泛,例如门诊预约调度排程^[15], 无人机调度^[16]等.更多关于鲁棒优化的研究可参看文献^[17, 18].

新增设施选址模型的研究中,根据研究目标的不同,可划分为两种类型.一种是竞争设施选址模型,另一种是“条件”设施选址模型.竞争设施选址模型是指假设在同一环境中存在其它竞争设施的条件下,采用新增新设施使自身所有连锁设施的市场份额最大化. Drezner^[19]运用计算机仿真的方法研究了平面上单个新设施的竞争选址模型. Fernández 等^[20]针对单个竞争设施的选址模型,分别采用启发式算法和最优化算法来求解,并对比了两类算法的优缺点. Blanquero 等^[21]考虑了重力准则下一般网络上单竞争设施的选址模型,并采用区间分解和 DC 技术设计了对应的分支定界求解算法. Grohmann 等^[22]运用元启发式算法和非线性优化方法解决了多竞争设施选址模型.

与竞争设施选址的目标不同,“条件”选址模型是通过为新设施选址,达到与经典选址模型同样的优化目的.所说的“条件”则是指系统中已有同类型的设施. Minięka^[23]拓展了无条件单设施选址模型,研究网络图上各类条件下的 1-中心选址模型和条件 1-中值模型. Berman 等^[24]通过求解无条件 $(p + 1)$ -中值选址模型和 $(p + 1)$ -中心选址模型解出网络图上有条件的 p -中值选址模型和 p -中心选址模型.而后, Berman 等^[25]采用调整距离矩阵的方法便设计出了更为简洁的求解方法.对于离散型和连续型的条件 p -中心设施的选址模型, Chen 等^[26]提出了一种新的松弛算法. Kaveh 等^[27]则使用改进的和声搜索算法,将条件 p -中心选址应用

于实际选址问题中. 针对需求点不确定的情况, 于江霞等^[28]研究了与本文同样的问题, 提出了时间复杂度为 $O(2^n m^2 n^3)$ 的求解算法. 由于于江霞等^[28]所设计算法的时间复杂度为 $O(2^n m^2 n^3)$, 随着问题规模的增大求解所需时间将呈指数增长, 因此只适用于小规模问题的求解. 当需求点的规模较大时, 该算法需要的求解时间是不能接受的. 因此, 需要进一步对该问题进行研究, 设计更具实用性的求解策略. 本文重新挖掘模型的结构性质, 采用不同的求解思路进行分析, 把该问题所需的求解时间复杂度从指数级改进到多项式时间, 从而有效降低了求解算法的实际应用条件, 提高了求解算法的适用范围.

2 新增设施鲁棒优化选址模型

该部分首先给出本文将要使用的重要定义和符号, 部分记号延续了文献[10, 29]的定义. 将现实中的目标城市结构图抽象为无向连通网络图 $G = (V, E)$, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点集, 表示人口集聚点(需求点); $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 为边集, 表示道路. $|V| = n, |E| = m$, 分别表示图中顶点和边的数量. 边 $e_j \in E$ 的权重表示该边的长度, 表示为确定的正值 $l(e_j) > 0$. 顶点 $v_i \in V$ 的权重表示该顶点的人数. 由于人口的流动, 各顶点的权重通常无法给出一个确定的值, 不妨以 \underline{w}_i 表示顶点 v_i 处人数的最小值, 以 \overline{w}_i 表示顶点 v_i 处人数的最大值, 则称 $W(v_i) = [\underline{w}_i, \overline{w}_i]$ 为顶点 v_i 的权重区间, 其中 $0 < \underline{w}_i \leq \overline{w}_i$. 若图 G 中每个顶点 v_i 都获得一个确定的权重 w_i , 称 $\{w_i | 1 \leq i \leq n\}$ 为一个(权重)情景, 用 s 表示. 令 S 表示所有权重区间 $W(v_i)$ 的笛卡尔积, $1 \leq i \leq n$. 若有情景 $s \in S$, 用记号 $w_i(s)$ 表示每个节点 $v_i \in V$ 在情景 s 下的权重. 同时, 符号 G 也表示网络图 G 上的所有点. 给定任意两点 $x \in G$ 和 $y \in G$, x 与 y 的距离指图 G 上 x 到 y 的最短路的距离, 表示为 $d(x, y)$. 注意在本文的无向图中, 恒有 $d(x, y) = d(y, x)$ 成立. 和先前文献中的假设相同, 在给定的网络图中, 任意两个点之间的距离所构成的矩阵 D 是已知的.

现假设网络图 G 上已经存在 r 个同类旧设施, 记为 $F = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$, 这些设施提供同质服务或出售相同商品. 令 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, 其中 x_i 表示对应设施 f_i 在网络图 G 中所在的位置. 网络图 G 中的各个需求点按照“就近原则”前往距离最近的设施进行服务. 令 $d(v_i, f_k)$ 表示需求点 v_i 到设施 f_k (即点 x_k) 的最短路的距离. 那么, 顶点 v_i 到设施 F 的距离表示为

$$d(v_i, F) = \min_{1 \leq k \leq r} d(v_i, f_k). \quad (1)$$

距离需求点 v_i 最近的设施可以表示为

$$\hat{f}_i = \arg \min_{1 \leq k \leq r} d(v_i, f_k). \quad (2)$$

需要注意的是, 当需求点 v_i 的最近距离设施对应多个时, 此时 \hat{f}_i 只代表 v_i 的最近服务设施中的一个. 在这种最近服务实施有多个时, 则该需求点权重需要平均分配到多个设施, 称这类需求点为“均分需求点”. 设施 f_k 所服务的需求点集表示为

$$V_k = \{v_i | \hat{f}_i = f_k\}, \quad (3)$$

该设施 f_k 的负荷记为 $M_k = \sum_{v_i \in V_k} \eta_i / w_i$, 其中 $\eta_i \in N_+$ 为需求点 v_i 对应服务设施的数量.

在本文的研究中, 假设所有设施的容量是无限制的, 同时设施的负荷量只是反映了该设施的忙闲或拥挤状况. 在已有设施不改变的前提下, 决策者希望通过新增服务设施 f_o 来均衡所有设施的负荷量, 也即目标为最小化所有设施中的最大负荷量. 在新增服务设施 f_o 后, 所有设施的集合表示为 $\tilde{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_r, f_o\}$. 确定情景 s 下, 若设施 f_o 建在固定位置 x , 设施集 \tilde{F} 中最高负荷设施的负荷量为

$$L(x, s) = \max_{k=1,2,\dots,r,o} \{M_k(x, s)\}, \quad (4)$$

其中 $x \in P$, P 是图 G 上新增设施 f_o 的候选点集合(如何得到点集 P 将在性质分析部分给出); $M_k(x, s)$ 表示情景 s 下设施 f_o 在位置 x 时设施 f_k 的负荷量, $f_k \in \tilde{F}$.

给定一个情景 s , 其最小最大负荷目标为

$$L(x_{\text{opt}}(s), s) = \min_{x \in P} L(x, s), \quad (5)$$

其中 $L(x_{\text{opt}}(s), s)$ 为情景 s 下设施 f_0 在最优选址位置 $x_{\text{opt}}(s)$ 时最高负荷设施的负荷量, $x_{\text{opt}}(s) \in P$.

根据上述符号表达, 定义情景 s 下新增设施在位置 x 的后悔值为

$$R(x, s) = L(x, s) - L(x_{\text{opt}}(s), s), \quad (6)$$

进一步, 定义设施的选址点 x 的最大后悔值为

$$R_{\max}(x) = \max_{s \in S} R(x, s), \quad (7)$$

将位置 x 的最坏情景记为 s_x , 则有

$$R_{\max}(x) = R(x, s_x) = L(x, s_x) - L(x_{\text{opt}}(s_x), s_x). \quad (8)$$

因此, 对于固定位置 x , 重要的是要找出该位置的最坏情景 s_x , 使得对于任何 $s \in S$, $R(x, s_x) \geq R(x, s)$ 恒成立. 对于某一情景 s , 和两个给定的位置 $x \in P$ 和 $y \in P$, 定义选址位置 x 相对于位置 y 在情景 s 下的后悔值为

$$R(x - y, s) = L(x, s) - L(y, s), \quad (9)$$

相应的, x 相对 y 的最大后悔值为

$$R_{\max}(x - y) = \max_{s \in S} R(x - y, s). \quad (10)$$

如果 $R_{\max}(x - y) = R(x - y, s_{xy})$, 称情景 s_{xy} 为位置 x 相对于位置 y 的最坏情景. 情景 s 下位置 x 的后悔值也可表示为

$$R(x, s) = \max_{y \in P} R(x - y, s), \quad (11)$$

进一步, 选址点 x 的最大后悔值可表示为

$$R_{\max}(x) = \max_{s \in S, y \in P} R(x - y, s) = \max_{y \in P, s \in S} R(x - y, s). \quad (12)$$

在网络需求点权重为区间数据的情形下, 为新增设施找到一个位置 $x^* \in G$, 使得该选址在以最大负荷量尽量小为目标的时候, 对应的最大后悔值 $R_{\max}(x)$ 最小化, 即 $x^* = \arg \min_{x \in G} \{R_{\max}(x)\}$. 本文的求解思路是首先分析新增设施分别在固定位置 x 与位置 y 使得 $R_{\max}(x - y)$ 最大时所对应的情景 s_{xy} , 并计算此情景下的后悔值; 其次, 对任意给定的 x , 计算该位置相对于所有 $y \in P$ 的最大后悔值, 比较计算结果得到 $R_{\max}(x)$; 然后, 遍历所有 $x \in P$ 得到不同位置的 $R_{\max}(x)$; 最后, 确定 $R_{\max}(x)$ 最小的选址点 x^* .

3 性质分析

3.1 选址位置离散化

在选址过程中允许设施落在图 G 上的任意点上(顶点或边上). 通过挖掘问题的固有性质, 将潜在的无穷多点离散为性质不同的有限的点, 并使得这些点能表示网络图上的所有点. 在本文中, 各需求点上需求的分配规则与该顶点权重的大小(是否为区间值)无关, 而是以就近接受服务的原则前往距离该顶点最近的设施.

对任意需求点 v_i , 称该需求点到距离最近的旧设施的距离为该顶点的临界距离, 记为

$$\delta_i = d(v_i, F). \quad (13)$$

根据就近服务原则, 一个需求点的临界距离正是该点愿意选择去往新设施 f_0 的最大距离. 给定一个需求点 v_i , 定义网络图中所有距离该需求点等于 δ_i 的点为 v_i 的临界点, 简记为 NIP 点. NIP 点是以需求点 v_i

为“中心”, 临界距离 δ_i 为“半径”确定的边界点. 进一步, 记所有 $v_i \in V$ 的临界点的集合为 NIPs.

引理 1 需求点 V 在网络图上的 NIPs 点数至多为 $O(mn)$.

证明 根据定义, 一个需求点在一条边上最多有两个 NIP 点, 由于网络图中一个需求点通常有多条道路与之相关联, 因此, 一个需求点可能对应多个 NIP 点. 对某个 NIP 点而言, 其对应的需求点通常只有一个, 但也有可能出现多个需求点的 NIP 点重合的情况. 给定一个需求点 v_i , 确定其对应的临界距离 δ_i 后, 一条边可能被该距离范围覆盖, 也可能不在该距离范围内. 如果一条边不在某需求点 v_i 的临界距离之内, 则该需求点在这条边上不存在 NIP 点. 对任意一个需求点 $v_i \in V$ 而言, 由于网络图 G 中共有 m 条边, 因此最多可能对应 $O(m)$ 个 NIP 点. 因此需求点集 V 在网络图中的 NIP 点数 $|NIPs|$ 至多为 $O(mn)$. 证毕.

定义网络图中 NIPs 和需求点 V 的集合为 NIPS, 即 $NIPS = NIPs \cup V$. 网络图 G 可以被视为以 NIPS 点和设施点 F 为端点的若干(有限条)线段构成的图. 若一条线段在至少一个需求点的临界距离范围之内, 则称该线段为 SEC 线段; 若一条线段未在任何需求点的临界距离范围之内, 则称该线段为“无效线段”. 在本文讨论线段时, 非特别说明, 线段均不包含其端点.

引理 2 新增设施 f_o 不能在“无效线段”内点进行选址.

证明 根据定义可知, 若新增设施位于“无效线段”内, 在“就近原则”下, 网络中所有需求点都将遵循原有的服务选择方案, 那么新增设施将没有任何需求需要服务, 原有各设施的负荷量不会发生任何变化, 因此属于无效的选址. 证毕.

根据引理 2, 新增设施的可选址位置需排除所有的“无效线段”, 同时也不能选在与旧设施相同的位置上. 将图 G 上所有“无效线段”的集合记为 U , 则 $G' = G \setminus (U \cup X)$ 是新设施可选择的位置集合. 另外, 为了更好的区分边上某些连续线段的性质, 下面给出“等效点”的定义. 当新增设施 f_o 的选址在边上的部分线段上移动时, 所有需求点对应的最近服务设施点不会发生改变, 则该线段上对应所有的点称为“等效点”.

引理 3 网络图边上一个确定 SEC 线段内点都是“等效点”.

证明 当新增设施 f_o 在某一 SEC 线段上移动时, 由于 SEC 线段对应临界距离的限制, 不仅去往新增设施的需求点不会发生改变, 而且其它需求点与其对应的服务设施点也不会发生改变, 也即新增设施 f_o 和 $\{\tilde{F} - f_o\}$ 分别对应的需求点都不会发生改变. 当新增设施只在同一 SEC 线段上移动时, 并不会改变需求点在各个服务设施间的分配状况. 因此, 当目标为最小化所有设施中的最大负荷量时, 同一 SEC 线段上所有的点都为“等效点”. 证毕.

不同于引理 3, 当新设施 f_o 建在 SEC 线段的两个端点时, 若端点是 NIP 点, 与该 NIP 点相对应的需求点去往新增设施 f_o 的距离与去往所对应的旧设施的距离相等. 此时, 根据前面均分型临界点的定义, 当新设施 f_o 选址在任意需求点所对应的 NIP 点时, 该需求点上的权重需要根据最近服务设施的数量进行平分, 平分后分别去往对应的服务设施. 根据不同的临界点类型, 可以把图中所有边上对应的 SEC 线段划分为两种类型. 第一种为 I 类 SEC 线段, 在这种类型中, SEC 线段段内的点与线段的端点具有不同的属性. 线段的两个端点分别属于不同需求点所对应的 NIP 点, 当需求点也是 NIP 点时, 则当作 NIP 点对待; 或者其中一个端点是需求点对应的 NIP 点, 而另一个端点则是服务设施所在的点, 当服务设施点的位置同时也是需求点时, 则当作设施点对待; 第二种为 II 类 SEC 线段, 两个端点中至少有一个端点是需求点 v , 该需求点的位置既不是 NIP 点也不是设施点, 该类 SEC 线段段内的所以点与需求点 v 的属性是一样的. “属性”是指新设施 f_o 选址不同时所对应的所有设施的负荷量状态不一样.

接着, 用示例图 1 展示局部图中不同类型的 SEC 线段和 NIP, f_1, f_2 , 和 f_3 为 3 个已有设施. 其中 f_1 与需求点 v_2 位置重合; 需求点 v_1, v_2 与 v_3 去往设施 f_1 接受服务; 需求点 v_4 去往 f_3 接受服务; 需求点 v_5 去往 f_2 接受服务; 需求点 v_6 所去往的设施未在图中画出. 图中虚线表示省略的边长.

图 1 中 $SEC(NIP_3, NIP_4)$ 为 I 类 SEC 线段, 当设施 f_o 建在该线段内一点, f_o 的负荷量为 $M_o = w_3 + w_5$; f_o 在 NIP_3 时, $M_o = w_3 + 0.5w_5$; f_o 在 NIP_4 时, $M_o = 0.5w_3 + w_5$; 设施 f_o 在 3 个位置的负荷各

不相等. 图 1 中, $SEC(f_1, NIP_1)$, $SEC(NIP_2, NIP_3)$ 也是 I 类 SEC 线段.

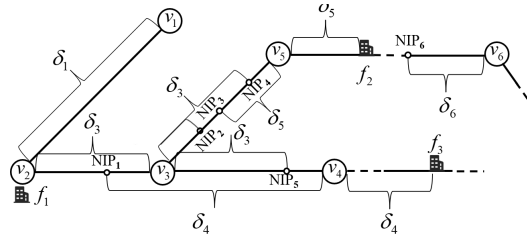


图 1 网络中局部路径示意图

Fig. 1 Illustration of local path planning

II 类线段如 $SEC(v_3, NIP_5)$, f_o 位于 $SEC(v_3, NIP_5)$ 内一点与 f_o 在端点 v_2 的负荷相同, $M_o = w_3 + w_4$; f_o 在 NIP_5 时, $M_o = 0.5w_3 + w_4$. 此外, $SEC(f_1, v_1)$, $SEC(NIP_1, v_3)$, $SEC(NIP_5, v_4)$, $SEC(v_4, f_3)$, $SEC(v_3, NIP_2)$, $SEC(NIP_4, v_5)$, $SEC(v_5, f_2)$ 和 $SEC(NIP_6, v_6)$ 也是 II 类 SEC 线段. 设施 f_2 与 NIP_6 之间为“无效线段”.

通过上述分析, 整个网络图可由 NIPS 点, 设施点 F , SEC 线段以及“无效线段”共同组成. 针对第一类 SEC 线段中的某一线段, 定义 MP 点为该线段的中点, 则 MP 点可以作为该 SEC 线段中所有“等效点”的代表点. 所有 I 类 SEC 线段中的 MP 点可用 MP_s 表示. 针对第二类 SEC 线段, 其中可用某一断的需求点 v 来表示该点和该点所在的 SEC 线段段内的所有点. 从新增设施 f_o 的优化结果来看, 点集合 $\{NIPS \setminus X\}$ 和点集合 MP_s 是新增设施候选点, 定义 $P = \{NIPS \setminus X\} \cup MP_s$, 原来的可选位置集合 G' 与集合 P 是等价的, 其中 $P \in G'$.

根据上述分析, 可以把网络图上所有边上的点划分为有限的且属性不同的备选点.

引理 4 确定候选位置集合 P 所需时间为 $O(mn)$.

证明 根据引理 1, NIPS 点集的数量为 $O(mn)$, 需求点 V 为 $O(n)$, 构成的 NIPS 点至多为 $O(mn)$. 网络中已有设施 F 的数量为 $O(r)$, NIPS 点和设施点 F 可将网络图最多分割为 $O(mn)$ 个线段, 则 $|MP_s|$ 最大为 $O(mn)$. 根据点集 P 的定义, 确定所有候选点需要的时间为 $O(mn)$. 证毕.

3.2 最坏情景分析

给定一个情景 s 和两个固定的位置 $x \in P$ 与 $y \in P$. 当新设施 f_o 建在固定位置 x , 假设 f_g 为最大负荷设施, 所服务的需求点集为 $V_g = \{v_i | \hat{f}_i = f_g\}$; 当设施 f_o 在固定位置 y 时, 最大负荷设施表示为 f_h , 所服务的需求点集为 $V_h = \{v_i | \hat{f}_i = f_h\}$. 根据式(10), 将新设施分别建在 x 与 y , f_g 和 f_h 对应为最大负荷设施, 情景 s 下的后悔值表示为

$$R(x - y, s, f_g - f_h) = L(x, s, f_g) - L(y, s, f_h). \tag{14}$$

最大后悔值为

$$\max_{s \in S} R(x - y, s, f_g - f_h) = R(x - y, s_{xy}^{gh}, f_g - f_h), \tag{15}$$

其中 s_{xy}^{gh} 表示新设施分别在 x 与 y , f_g 和 f_h 为最大负荷设施的最坏情景.

又因为式(14)中 $L(x, s, f_g) - L(y, s, f_h) = M_g(x, s) - M_h(y, s)$, 故本部分内容为证明至少存在一个情景 $s_{xy}^{gh} \in S$, 使 $M_g(x, s) - M_h(y, s)$ 最大.

令 α_i 和 β_i 均表示距离需求点 v_i 最近的设施数量. 则情景 s 下, 设施 f_g 和设施 f_h 的负荷量分别为

$$M_g(x, s) = \sum_{v_i \in V_g} a_i w_i = \sum_{v_i \in V_g} \frac{1}{\alpha_i} w_i, \quad \alpha_i \in N_+, \tag{16}$$

$$M_h(y, s) = \sum_{v_i \in V_h} b_i w_i = \sum_{v_i \in V_h} \frac{1}{\beta_i} w_i, \quad \beta_i \in N_+. \quad (17)$$

关于式(16)和式(17)中的集合 V_g 和 V_h 有两种情形, 下面进行详细的讨论.

1) 点集 V_g 和 V_h 中无相同的需求点, 即 $V_g \cap V_h = \emptyset$, 此时设施 f_g 和 f_h 分别服务两簇不同的需求点, 有

$$M_g(x, s) - M_h(y, s) = \sum_{v_i \in V_g} \frac{1}{\alpha_i} w_i - \sum_{v_i \in V_h} \frac{1}{\beta_i} w_i. \quad (18)$$

若将 V_g 中需求点的权重都取其对应的权重上界 \bar{w}_i , V_h 中需求点的权重都取其对应的权重下界 \underline{w}_i , 上式有最大值.

2) 点集 V_g 和 V_h 中有相同的需求点, 即 $V_g \cap V_h \neq \emptyset$, 令 $V_g \cap V_h = V_q$, $V_g \setminus V_q = V'_g$, $V_h \setminus V_q = V'_h$, 则有

$$\begin{aligned} M_g(x, s) - M_h(y, s) &= \left(\sum_{v_i \in V'_g} \frac{1}{\alpha_i} w_i + \sum_{v_i \in V_q} \frac{1}{\alpha_i} w_i \right) - \left(\sum_{v_i \in V'_h} \frac{1}{\beta_i} w_i + \sum_{v_i \in V_q} \frac{1}{\beta_i} w_i \right) \\ &= \left(\sum_{v_i \in V'_g} \frac{1}{\alpha_i} w_i - \sum_{v_i \in V'_h} \frac{1}{\beta_i} w_i \right) + \left(\sum_{v_i \in V_q} \frac{1}{\alpha_i} w_i - \sum_{v_i \in V_q} \frac{1}{\beta_i} w_i \right). \end{aligned} \quad (19)$$

这种情形下, 本文将根据 V_q 中需求点的权重大小情况分析. 对任意 $v_t \in V_q$, 不妨假设该需求点上的权重有 $a_t w_t$ 前往设施 f_g , 其中 $a_t = 1/\alpha_t$, $\alpha_t \in N_+$; 假设需求点 v_t 到设施 f_h 的权重为 $b_t w_t$, 其中 $b_t = 1/\beta_t$, $\beta_t \in N_+$. 此时有下面的判断:

- (a) 若 $a_t w_t \geq b_t w_t$, 即 $a_t w_t - b_t w_t \geq 0$, 那么取 $w_t = \bar{w}_t$, $(a_t w_t - b_t w_t)$ 有最大值;
- (b) 若 $a_t w_t < b_t w_t$, 即 $a_t w_t - b_t w_t < 0$, 那么取 $w_t = \underline{w}_t$, $(a_t w_t - b_t w_t)$ 有最大值.

同理, V_q 中各需求点权重均可根据上述判断得到, 此时式(19)中

$$\sum_{v_i \in V'_g} \frac{1}{\alpha_i} w_i - \sum_{v_i \in V'_h} \frac{1}{\beta_i} w_i \quad (20)$$

有最大值. 而 V'_g 中需求点的权重都取其上界 \bar{w}_i , V'_h 中需求点的权重都取其下界 \underline{w}_i , 式(19)中

$$\sum_{v_i \in V'_g} \frac{1}{\alpha_i} w_i - \sum_{v_i \in V'_h} \frac{1}{\beta_i} w_i \quad (21)$$

有最大值. 因此式(19)最大.

当固定位置 x 与 y , 且最大负荷设施 f_g 和 f_h 都已知时, 可以通过简单的计算确定集合 V_g 和 V_h 中所有需求点的具体情况, 包括两个集合中是否包含同一个需求点; 如果出现同一个需求点属于两个集合的情况, 该需求点上权重的分配情况以及具体去向等. 此时, 集合 V_g 和 V_h 中各需求点的权重分配情况已经明确. 但是, 对不属于 V_g 和 V_h 的需求点, 即集合 $\{V \setminus (V_g \cup V_h)\}$ 中的需求点, 其权重可取使得设施 f_g 和 f_h 分别为最大负荷设施的任意值, 但具体取哪些值不能确定. 这里对集合 $\{V \setminus (V_g \cup V_h)\}$ 中所有需求点作取各自对应的权重下界的处理. 通过这种取值的处理方式并不会影响 $M_g(x, s) - M_h(y, s)$ 成为最大值. 进而, 有下面的引理成立.

引理 5 当新设施分别建在 x 与 y , f_g 和 f_h 分别为对应的最大负荷设施时, 存在一个情景 $s_{xy}^{gh} \in S$ 使得 $R(x - y, s_{xy}^{gh}, f_g - f_h) \geq R(x - y, s, f_g - f_h)$ 对任何 $s \in S$ 都成立. 情景 s_{xy}^{gh} 为最坏情景, 其权重结构

$$w_i(s_{xy}^{gh}) = \begin{cases} \bar{w}_i, & v_i \in V_g \\ \underline{w}_i, & v_i \in V_h, V_g \cap V_h = \emptyset \\ \underline{w}_i, & v_i \in \{V \setminus (V_g \cup V_h)\}, \end{cases} \quad \text{或} \quad w_i(s_{xy}^{gh}) = \begin{cases} \bar{w}_i, & v_i \in V'_g \\ \underline{w}_i, & v_i \in V'_h \\ \bar{w}_i \text{ 或 } \underline{w}_i, & v_i \in V_q, V_g \cap V_h = V_q \\ \underline{w}_i, & v_i \in \{V \setminus (V_g \cup V_h)\}. \end{cases}$$

引理 6 当新设施分别建在 x 与 y , f_g 和 f_h 分别为对应的最大负荷设施时, 确定最坏情景 s_{xy}^{gh} 所需的时间复杂度为 $O(n)$.

证明 新设施分别建在 x 与 y 位置时, 根据式(1)、式(2)和式(3), 需求点 V 的去向分配及各个设施所服务的需求点可在时间 $O(n)$ 计算得到. 同时, 基于引理 5 的结论可以判断集合 $V_g \cup V_h$ 中所有需求点的取值, 同时, 对网络图中其它所有需求点 $\{V \setminus (V_g \cup V_h)\}$ 做权重取区间下界的统一处理, n 个需求点都取得相应权重所需时间为 $O(n)$. 因此, 确定最坏情景 s_{xy}^{gh} 的时间复杂度为 $O(n)$. 证毕.

4 选址策略

通过前面的相关性质可知, 当新建服务设施分别选在 x 与 y , 且其最大负荷量相对应的设施分别为 f_g 和 f_h 时, 对应的最坏情景为 s_{xy}^{gh} . 而实际上, 设施 f_g 和 f_h 可能为设施 \tilde{F} 中任何一个, 且已知 $|\tilde{F}| = (r + 1)$. 因此位置 x 相对于位置 y 的最坏情景为 $(r + 1)^2$ 个形如 s_{xy}^{gh} 的情景之一, 其中能使式(11)最大的即为情景 s_{xy} .

引理 7 新设施在位置 x 相对于位置 y 的最坏情景 s_{xy} 可在 $O(r^2n)$ 时间内得到.

证明 由引理 6, 确定情景 s_{xy}^{gh} 的时间复杂度为 $O(n)$, 而确定全部形如 s_{xy}^{gh} 的情景需要 $O(r)^2$ 次. 同时, 由式(15)计算得到 $O(r^2)$ 个后悔值, 所需时间为 $O(r^2n)$. 通过比较, 找到 $O(r^2)$ 个后悔值中最大后悔值, 其对应的情景则为 s_{xy} . 因此, 最终需要时间 $O(r^2n + r^2) = O(r^2n)$ 来确定最坏情景 s_{xy} . 证毕.

当位置 x 固定时, 遍历所有 $y \in P$ 中的点得 $O(mn)$ 个后悔值 $R_{\max}(x - y)$, 比较 $O(mn)$ 次可得 $R_{\max}(x) = \max_{y \in P} \{R_{\max}(x - y)\}$, 该值即为位置 x 的最大后悔值, 对应的情景即为 s_x . 因此, 有下面的引理成立.

引理 8 新设施在位置 x 的最坏情景 s_x 和最大后悔值 $R_{\max}(x)$ 可在 $O(r^2mn^2)$ 时间内得到.

进一步, 对于图中所有 $x \in P$ 计算得到 $R_{\max}(x)$, 所需时间为 $O(r^2m^2n^3)$. 比较 $O(mn)$ 次 $R_{\max}(x)$ 的大小, 即可得最小最大后悔选址点 $x^* = \arg \min_{x \in P} \{R_{\max}(x)\}$.

综上, 当一般网络图中的需求点无需求概率分布信息, 而只能以区间数据形式给出需求范围时, 以最大负荷量的最大后悔值最小为目标的新增设施选址策略步骤可以归纳如下:

步骤 1 确定 NIPs 点集, 与需求点集 V 构成 NIPS 点集.

步骤 2 基于临界点规则以及 SEC 线段分类, 确定 MPs 点集.

步骤 3 确定候选点集, $P \leftarrow \{NIPS \setminus X\} \cup MPs$.

步骤 4 根据引理 5, 寻找固定位置 x 与 y , 最大负荷设施分别对应 f_g 和 f_h 时的最坏情景 s_{xy}^{gh} , 并计算其后悔值. 该过程需验证 f_g 和 f_h 是否为情景 s_{xy}^{gh} 下新设施在固定位置 x 与 y 的最大负荷设施, 若与假设矛盾, 则舍去该情景.

步骤 5 重复 $(r + 1)^2$ 次步骤 4, 通过比较确定最坏情景 s_{xy} 及对应后悔值.

步骤 6 对于给定的位置 x , 计算其对应所有可能的 $y \in P$, 重复步骤 4 和步骤 5, 获得最坏情景 s_x 及后悔值 $R_{\max}(x)$.

步骤 7 对于所有 $x \in P$, 重复步骤 6, 比较不同位置的 $R_{\max}(x)$, 最终确定最小最大后悔选址点 x^* .

通过以上分析, 有下面的结论.

定理 1 当需求点的需求信息为区间值时, 以最小化最大负荷量的最大后悔值为目标, 一般网络图上的新增设施选址问题可在 $O(r^2m^2n^3)$ 时间求解.

上述给出的新增设施选址算法, 采用遍历最大负荷量所有可能的设施的方法, 来对比分析了任意两候选点其对应所有可能的最坏情景. 算法的思路为逐步分析所有后悔值的同时筛选新增设施选址的备选点, 而

后寻得新增设施选址位置 x^* , 该选址点则为最小最大后悔值目标下的最优位置.

5 算例分析

本节先基于随机生成的网络图, 给出一个数值算例展示求解算法的关键求解步骤. 之后, 基于不同的需求点数量和不同的已有设施数量, 从求解所需时间方面, 对本文算法与于江霞等^[29]所设计的算法进行分析比较.

5.1 算法求解示例

某地区交通网络图 G_0 如图 2 所示, 区域内现有 2 个旧设施(f_1, f_2), 12 个需求点(v_1, v_2, \dots, v_{12}). 其中图中所有的边可以解释为实际中道路, 边的长度可以是路长, 也可以是经过该道路所需要花费的时长; 顶点的权重表示需求量的大小, 如人口数等. 边的长度以及各节点的权重区间在图 2 中已经标出. 决策者计划在该区域内新增一个同类设施 f_0 , 以改变区域内现有设施负荷过高的情况.

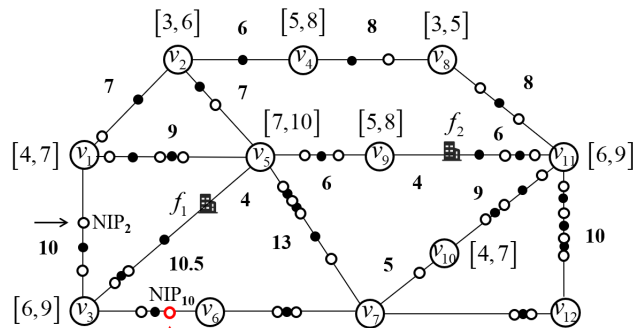


图 2 网络图 G_0 的例子

Fig. 2 An example of network G_0

根据上一节所设计的选址策略, 设施 f_0 的选址过程如下:

步骤 1 通过式(1)和式(13)计算所有需求点所对应的临界距离 δ , 在图 2 上用空心点代表点集 NIPs 所对应的点, 同时与 V 组成点集 NIPS.

步骤 2 根据临界点规则以及 SEC 线段的划分, 确定所有 I 类 SEC 线段的中点为 MPs, 在图 2 中用实心的圆点来表示.

步骤 3 确定候选点集 P .

步骤 4 对于两个固定位置 NIP_{10} 与 NIP_2 (图中用箭头指出), 对应情景分析部分的 x 与 y . 当新建设施在位置 $NIP_{10}(x)$, 假设最大负荷设施为 f_0 ; 当新建设施在位置 $NIP_2(y)$, 假设最大负荷设施为 f_0 . 由引理 5 可知最坏情景为

$$s_{xy}^{00} = \{4, 3, 9, 5, 7, 8, 9, 3, 5, 7, 6, 3\}, \quad (22)$$

此时 $M_0(NIP_{10}) = 29.5$, $M_0(NIP_2) = 25$, 根据式(14)~式(16), 后悔值 $R = 29.5 - 25 = 4.5$.

步骤 5 重复步骤 4. 当新设施在位置 $NIP_{10}(x)$ 时, 最大负荷设施为 f_0 ; 当新设施在位置 $NIP_2(y)$ 时, 最大负荷设施为 f_1 . 最坏情景为

$$s_{xy}^{01} = \{4, 3, 9, 5, 7, 8, 9, 3, 5, 7, 6, 3\}, \quad (23)$$

该情景下当新设施在位置 $NIP_2(y)$ 时, f_1 不是最大负荷设施, 与假设矛盾, 舍去.

当新设施在位置 $NIP_{10}(x)$ 时, 最大负荷设施为 f_0 ; 当新设施在位置 $NIP_2(y)$ 时, 最大负荷设施为 f_2 . 最坏情景为

$$s_{xy}^{02} = \{4, 3, 9, 5, 7, 8, 9, 3, 5, 7, 6, 3\}, \quad (24)$$

同样, 该情景下当新设施在位置 $NIP_2(y)$ 时, f_2 不是最大负荷设施, 与假设矛盾, 舍去.

采用相同的方法获得新建设施选址的点为 $NIP_{10}(x)$ 且其最大负荷量对应的设施为 f_1, f_2 时所对应的最坏情景; 同样, 获得新建设施选址的点为 $NIP_2(y)$, 且其最大负荷量所对应的设施为 f_1, f_2, f_3 时所对应的最坏情景, 同时计算最坏情景下的后悔值.

通过计算, 当新设施在位置 $NIP_{10}(x)$, 最大负荷设施为 f_1 ; 与新设施在位置 $NIP_2(y)$, 最大负荷设施为 f_3 相比较时, 后悔值最大, $R = 31 - 24 = 7$, 对应情景为

$$s_{xy}^{1o} = \{7, 6, 6, 8, 10, 4, 5, 3, 5, 4, 6, 3\}, \tag{25}$$

因此, 情景 s_{xy} 为 $s_{xy} = s_{xy}^{1o}$, 后悔值 $R_{\max}(x - y) = 7$.

步骤 6 固定 $NIP_{10}(x)$ 点, 对位置 y 遍历所有候选点, 重复步骤 4 和步骤 5, 发现当 f_3 在位置 $NIP_2(y)$ 和 $v_3(y)$ 时对应的最大后悔值 $R_{\max}(x - y) = 7$, 最坏情景 s_x 为

$$s_x = \{7, 6, 6, 8, 10, 4, 5, 3, 5, 4, 6, 3\}. \tag{26}$$

步骤 7 对于所有 $x \in P$, 最大后悔值如表 1 所示.

表 1 最大后悔值对照表
Table 1 The maximum regret values

候选点 x	$R_{\max}(x)$	候选点 x	$R_{\max}(x)$	候选点 x	$R_{\max}(x)$	候选点 x	$R_{\max}(x)$
v_1	12.5	NIP_9	10.0	v_4	13.5	MP_{19}	21.5
NIP_1	10.0	MP_7	10.0	MP_{14}	17.0	NIP_{26}	17.5
MP_1	11.0	NIP_{10}	7.0	NIP_{18}	18.5	NIP_{27}	17.5
v_2	11.0	v_6	9.0	v_8	21.5	MP_{20}	21.5
NIP_2	10.0	NIP_{11}	10.5	NIP_{19}	18.0	NIP_{28}	21.5
MP_2	10.0	MP_8	15.0	MP_{15}	22.0	v_{12}	21.5
NIP_3	10.0	NIP_{12}	15.0	NIP_{20}	8.5	NIP_{29}	21.5
v_3	10.0	v_7	15.0	v_9	28.5	MP_{21}	21.5
NIP_4	10.0	MP_9	11.0	MP_{16}	28.5	NIP_{30}	17.0
MP_3	11.0	NIP_{13}	10.0	NIP_{21}	24.0	NIP_{31}	17.5
NIP_5	16.0	NIP_{14}	17.5	MP_{17}	21.5	MP_{22}	21.5
MP_4	22.5	MP_{10}	21.0	NIP_{22}	17.5	NIP_{32}	24.0
NIP_6	10.0	NIP_{15}	23.5	v_{11}	19.0	MP_{23}	28.5
v_5	14.0	MP_{11}	27.5	NIP_{23}	15.0	NIP_{33}	24.0
NIP_7	10.0	NIP_{16}	12.5	v_{10}	15.0	MP_{24}	21.5
MP_5	10.0	MP_{12}	15.0	NIP_{24}	15.0	NIP_{34}	21.5
NIP_8	11.0	NIP_{17}	15.0	MP_{18}	19.0	—	—
MP_6	14.0	MP_{13}	11.0	NIP_{25}	17.5	—	—

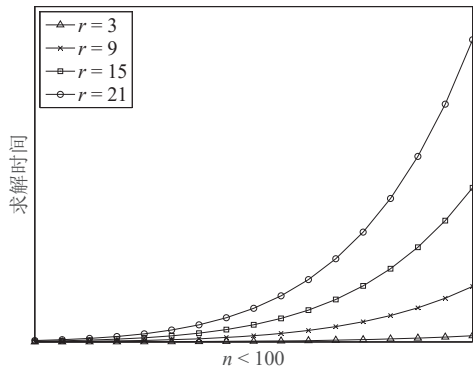
比较表 1 中不同位置对应的后悔值, $\min_{x \in P} \{R_{\max}(x)\} = 7$, 对应 NIP_{10} 即为最小最大后悔选址点 x^* .

5.2 算法求解所需时间比较

这部分主要分析本文算法与于江霞等^[29]所提出的算法(简记为 NFL 算法)在求解时间上的表现. 在本部分所有示意图中, 原算法(在图中以黑色实线表示)为于江霞等^[29]提出的算法, 不同的 r 所对应的(在图中以不同形式的点划线表示)为本文提出的算法. 其中 n 表示目标网络图中需求点的数量, r 表示目标网络中已有设施的数量. 需要特别说明的是, 已有设施的位置也可以位于网络图的边上, 因此, 在算例中 $r \geq n$ 是允许的.

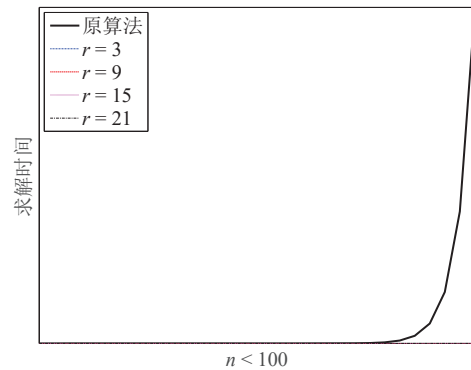
图 3(a)展示了不同需求点数量和不同原有设施数量下, 本文算法所需求解时间的变化趋势; 图 3(b)则对比了不同需求点数量情况下, 于江霞等^[29]提出的算法与本文算法的求解时间. 需要注意的是, 于江霞等^[29]所设计的算法在求解时间复杂度上与目标网络中已有设施的数量 r 不相关, 因此这里不对原算法做不同 r 下的算例对比. 从图 3 可以看出, 虽然本文所给出的算法时间复杂度会随着需求点的数量 n 和旧设施的数量 r 的增大而逐步增加, 但算法的求解时间不会随着需求点数量和(或)旧设施数量的增加而出现急剧

增长. 而于江霞等^[29]提出的算法的求解时间则会随着需求点数量的增加而急剧增长(见图 3(b)). 当 n 较大时, 于江霞等^[29]算法所需要的计算时间远高于本文算法所需要的计算时间.



(a) 本文算法求解时间比较图

(a) The comparison diagram of of solution time of the algorithm in this paper



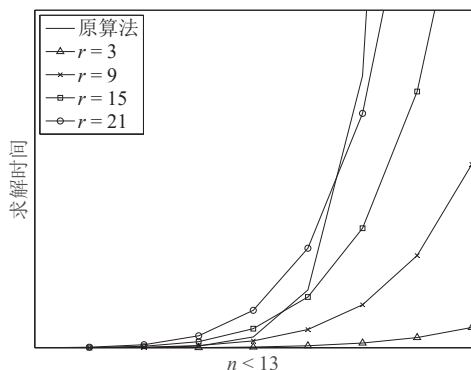
(b) 本文算法与原算法求解时间比较图

(b) The comparison diagram of the of solution time between the proposed algorithm and the original algorithm

图3 $n < 100$ 时原算法与本文算法求解时间比较图

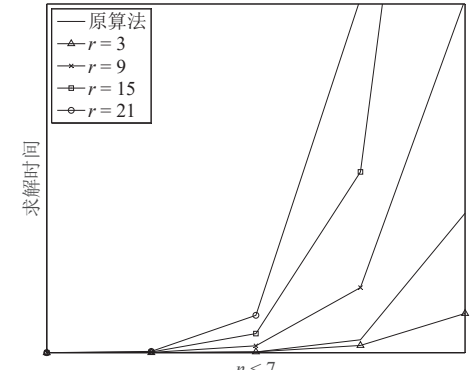
Fig. 3 Comparison diagram of the solution time between the algorithm in this paper and the NFL algorithm when $n < 100$

图 4(a)和图 4(b)分别展示了 $n < 13$ 和 $n < 7$ 两种情况下, 本文算法与原算法在求解所需时间上的对比结果.



(a) 本文算法求解时间比较图

(a) The comparison diagram of of solution time of the algorithm in this paper



(b) 本文算法与原算法求解时间比较图

(b) The comparison diagram of the of solution time between the proposed algorithm and the original algorithm

图4 n 较小时, 原算法与本文算法求解时间比较图

Fig. 4 Comparison diagram of the solution time between the algorithm in this paper and the NFL algorithm when n is smaller

当 $n < 13$ 时, 本文的求解算法在所需时间方面整体小于原算法. 当 n 比较小, 同时 r 比较大时, 原算法才会在求解时间上略占优势. 根据图 4(a), 当 $n > 9$ 时, 原算法所需要的求解时间已高于本文算法所需要(不同 r 取值情况下)的求解时间.

当 $n < 7$ 时, 相比本文的求解算法, 只有在 $r = 3$ 时, 原算法比本文算法需要更多的求解时间; 当 $r = 9, 15, 21$ 时, 原算法在求解时间上都有更好的表现. 即, 当 $n < 7$ 时, 于江霞等^[29]所设计算法的求解时间整体是小于本文算法的求解时间的.

通过以上比较分析可知, 于江霞等^[29]的算法适用于小规模的网络图, 而本文算法则适合于大规模的网络图.

6 结束语

本文研究了需求量属于区间值的新增设施鲁棒优化选址问题, 通过在目标网络中新增一个设施, 使得最大负荷设施的负荷量的最大后悔值最小化. 在已有研究的基础上, 本文改变寻求最坏情景的思路, 通过限定最坏情景对应最优选址的位置, 采用比较分析两个固定位置的后悔值最大的情景结构, 进而确定后悔值最小的选址. 已有算法的时间复杂度是随着需求点数量的增加而呈指数增长的, 因此只适用于网络节点较少的小规模网络问题. 而本文算法克服了该缺点, 给出了多项式时间的求解算法, 对大规模网络中的新增设施选址问题更具实用性. 在实际中, 道路的通行时间也是不确定的, 后续研究将考虑网络图边长为区间估计值的选址问题, 并设计相应的求解算法.

参考文献:

- [1] Kouvelies P, Vairaktarakis G, Yu G. Robust 1-median Location on a Tree in the Presence of Demand and Transportation Cost Uncertainty. Working Paper 93/94-3-4. Department of Management Science and Information Systems, Graduate School of Business, The University of Texas at Austin, 1994.
- [2] Averbakh I, Berman O. Minmax regret median location on a network under uncertainty. *INFORMS Journal on Computing*, 2000, 12(2): 104–110.
- [3] Averbakh I, Berman O. An improved algorithm for the minmax regret median problem on a tree. *Networks*, 2003, 41(2): 97–103.
- [4] Yu H I, Lin T C, Wang B F. Improved algorithms for the minmax-regret 1-center and 1-median problems. *ACM Transactions on Algorithms*, 2008, 4(3): 1–27.
- [5] Brodal G S, Georgiadis L, Katriel I. An $O(n \log n)$ version of the Averbakh-Berman algorithm for the robust median of a tree. *Operations Research Letters*, 2008, 36(1): 14–18.
- [6] Averbakh I, Berman O. Minimax regret p -center location on a network with demand uncertainty. *Location Science*, 1997, 5(4): 247–254.
- [7] Averbakh I, Berman O. Algorithms for the robust 1-center problem on a tree. *European Journal of Operational Research*, 2000, 123(2): 292–302.
- [8] Berman O, Wang J. The minmax regret gradual covering location problem on a network with incomplete information of demand weights. *European Journal of Operational Research*, 2011, 208(3): 233–238.
- [9] Baldomero-Naranjo M, Kalcsics J, Rodríguez-Chía A. Minmax regret maximal covering location problems with edge demands. *Computers & Operations Research*, 2021, 130(6): 105181.
- [10] Li H M, Luo T B, Xu Y F, et al. Minimax regret vertex centroid location problem in dynamic general networks. *Omega: The International Journal of Management Science*, 2018, 75(3): 87–96.
- [11] Arumugam G P, Augustine J, Golin M J, et al. Minimax regret k -sink location on a dynamic path network with uniform capacities. *Algorithmica*, 2019, 81(9): 3534–3585.
- [12] Yang M, Liu Y, Yang G. Robust optimization for a multiple-priority emergency evacuation problem under demand uncertainty. *Journal of Data, Information and Management*, 2020, 2(6): 185–199.
- [13] Wang S, Chen Z, Liu T. Distributionally robust hub location. *Transportation Science*, 2020, 54(5): 1189–1210.
- [14] Sarhadi H, Naoum-Sawaya J, Verma M. A robust optimization approach to locating and stockpiling marine oil-spill response facilities. *Transportation Research, Part E: Logistics and Transportation Review*, 2020, 141(9): 102005.
- [15] 王珊珊, 李金林, 彭春, 等. 不确定服务时间下分布式鲁棒门诊预约调度和排程. *系统工程学报*, 2019, 34(4): 566–576. Wang S S, Li J L, Peng C, et al. Distributionally robust outpatient appointment scheduling and sequencing with uncertain service times. *Journal of Systems Engineering*, 2019, 34(4): 566–576. (in Chinese)
- [16] 何勇, 张成义, 李珊珊. 基于两阶段鲁棒优化的无人机载机平台调度问题. *系统工程学报*, 2020, 35(6): 838–848. He Y, Zhang C Y, Li S S. Unmanned aerial vehicle carriers scheduling problem based on two-stage robust optimization. *Journal of Systems Engineering*, 2020, 35(6): 838–848. (in Chinese)
- [17] Lu M, Shen Z. A review of robust operations management under model uncertainty. *Production and Operations Management*, 2020, in press. <https://doi.org/10.1111/poms.13239>.

- [18] Cheng C, Adulyasak Y, Rousseau L. Robust facility location under demand uncertainty and facility disruptions. *Omega: The International Journal of Management Science*, 2021, 103(6): 102429.
- [19] Drezner T. Locating a single new facility among existing, unequally attractive facilities. *Journal of Regional Science*, 1994, 34(2): 237–252.
- [20] Fernández J, Pelegrín B, Plastria F, et al. Solving a huff-like competitive location and design model for profit maximization in the plane. *European Journal of Operational Research*, 2007, 179(3): 1274–1287.
- [21] Blanquero R, Carrizosa E, Nogales-Gómez A, et al. Single-facility huff location problems on networks. *Annals of Operations Research*, 2014, 222(1): 175–195.
- [22] Grohmann S, Urošević D, Carrizosa E, et al. Solving multifacility huff location models on networks using metaheuristic and exact approaches. *Computers & Operations Research*, 2017, 78(2): 537–546.
- [23] Minieka E. Conditional centers and medians of a graph. *Networks*, 1980, 10(3): 265–272.
- [24] Beramn O, Simchi-Levi D. Conditional location problem on networks. *Transportation Science*, 1990, 24(1): 77–78.
- [25] Berman O, Drezner Z. A new formulation for the conditional p -median and p -center problems. *Operations Research Letters*, 2008, 36(4): 481–483.
- [26] Chen D, Chen R. A relaxation-based algorithm for solving the conditional p -center problem. *Operations Research Letters*, 2010, 38(3): 215–217.
- [27] Kaveh A, Nasr H. Solving the conditional and unconditional-center problem with modified harmony search: A real case study. *Scientia Iranica*, 2011, 18(4): 867–877.
- [28] 于江霞, 赵阳, 罗太波, 等. 最小最大后悔准则下新增设施选址策略研究. *运筹与管理*, 2021, 30(5): 15–20.
Yu J X, Zhao Y, Luo T B, et al. The study on new facility location strategy under minmax regret criterion. *Operations Research and Management Science*, 2021, 30(5): 15–20. (in Chinese)

作者简介:

罗太波(1989—), 男, 江西赣州人, 博士, 讲师, 研究方向: 调度优化, Email: tbluo@xidian.edu.cn;

赵阳(1995—), 男, 河南许昌人, 硕士生, 研究方向: 供应链管理, Email: 854038583@qq.com;

于江霞(1976—), 女, 山东潍坊人, 博士, 副教授, 研究方向: 系统评估与优化, Email: jxyu@xidian.edu.cn;

李红梅(1989—), 女, 四川广元人, 博士, 副教授, 研究方向: 应急管理, Email: hmli@nuw.edu.cn.