南京理工大学

2016年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：840　　科目名称：高等代数　　满分：150分

注意：（1）认真阅读答题纸上的注意事项；（2）所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；（3）本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一．填空题（每题6分，共60分）：

1. 求行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$_________.

2. 令 $\alpha=(1,1,0)$，$\beta=(2,0,2)$，则 α 在 β 方向上的投影向量为_________.

3. 令 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$_________.

4. 令 $\alpha=(x,y,0)$，$\beta=(0,y,z)$，$\gamma=(x,0,z)$，则 α，β，γ 线性无关的充分必要条件是_________.

5. 已知 1，x，x^2 是 $K[x]_3$ 的一组基，1，$x-1$，$(x-1)^2$ 也是 $K[x]_3$ 的一组基，则从基 1，$x-1$，$(x-1)^2$ 到基 1，x，x^2 的过渡矩阵为_________.

6. 已知 1 和 -1 是矩阵 $A=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ a & 2 & b \\ -1 & c & -6 \end{bmatrix}$ 的特征值，则 $|A+A^{-1}|=$______.

7. 令 A 是一个4阶方阵满足 $A^2=0$ 且 $r(A)=2$，则 A 的若当标准形为_________.

8. 多项式 x^3+3x^2+t 有重根的充分必要条件是_________.

9. 实二次型 $f=(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2-(2x_2-2x_3)^2$ 的正惯性指数是_________.

10. 已知 A 是一个 5×4 的矩阵，且线性方程组 $AX=0$ 的解空间的维数是2，则线性方程组 $A'X=0$ 的解空间的维数是_________.

二．（10分）求证：$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 是有理数域上的一个不可约多项式.

三．（10分）已知 α，β，γ 是三个 n 维列向量，求证：$\alpha+\beta$，$\alpha+\gamma$，$\beta+\gamma$ 线性无关当且仅当 α，β，γ 线性无关.

四．（10分）令 $\alpha_1=(0,3,1,2)$，$\alpha_2=(1,2,3,2)$，$\alpha_3=(1,-1,2,0)$，$\alpha_4=(3,0,7,4)$，$\alpha_5=(2,1,5,6)$，求 α_1，α_2，α_3，α_4，α_5 的一个极大线性无关部分组，并将其余向量用此极大线性无关部分组线性表示.

五．（10分）令 $M_n(K)$ 是数域 K 上的所有 n 阶方阵所形成的线性空间，令 M 是 $M_n(K)$ 中所有的对称矩阵所形成的子空间，令 N 是 $M_n(K)$ 中所有的反对称矩阵所形成的子空间，求证：$M_n(K)=M\oplus N$.

六．（10分）设 A 是数域 K 上的一个 $m\times n$ 矩阵，求证：$r(A)=r(A'A)=r(AA')$.

七．（10分）令 $R[x]_3$ 是所有次数小于3的实系数多项式所形成的线性空间，$\forall f(x)\in R[x]_3$，令 $D(f(x))=\dfrac{d(f(x+1))}{dx}$，求证：$D$ 是 $R[x]_3$ 上的一个线性变换，并求出 $R[x]_3$ 的一组基使得 D 在此基下的矩阵是若当标准形.

八．（15分）设 A 是一个 n 阶复方阵，求证：存在与对角矩阵相似的矩阵 B 以及幂零矩阵 C，使得 $A=B+C$ 且 $BC=CB$.

九．（15分）设 $A=\begin{pmatrix} B & b \\ b' & a \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 B 是一个 n 阶矩阵，b 是一个 n 维列向量，求证：$|A|\le a|B|$.