河南师范大学

2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码与名称： 802 线性代数

适用专业或方向：统计学

考试时间：3 小时 满分：150 分 试题编号： A 卷

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一.（15 分）计算下列行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}。$$

二.（15 分）利用基础解系表示下面非齐次线性方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=2 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=2 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=1 \end{cases}。$$

三.（15 分）设 $A=\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$，其中 B 和 C 都是可逆矩阵。证明 A 是可逆矩阵，并求其逆矩阵 A^{-1}。

四.（20 分）设 n 阶矩阵 A,B 满足 $2A-B-AB=E$， $A^2=A$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，

（1）证明：$A-B$ 是可逆矩阵，并求 $(A-B)^{-1}$；

（2）已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$，求矩阵 B。

五.(15分)已知三维向量空间中两个向量$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$,试求与向量$\alpha_1$,$\alpha_2$都正交的向量$\alpha$。

六.（20分）设方阵A的特征值$\lambda_1\neq\lambda_2$,对应的特征向量分别为α_1,α_2,证明:

（1）$\alpha_1-\alpha_2$不是A的特征向量;

（2）α_1，$\alpha_1-\alpha_2$线性无关。

七.（20分）已知实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$$

（1）用正交线性变换化此二次型为标准形，并写出所用的正交线性变换;

（2）求$f(x_1,x_2,x_3)$的秩、正惯性指数与符号差。

八.（10分）设A是$m\times n$非零实矩阵，b是$m\times 1$实矩阵，求证线性方程组

$$A^T AX=A^T b$$

一定有解。

九.（10分）设A是任意一个n阶实可逆对称矩阵，求证A必合同于以下形式的矩阵之一:

$$\begin{pmatrix}0&E_r&0\\E_r&0&0\\0&0&E_{n-2r}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&E_r&0\\E_r&0&0\\0&0&-E_{n-2r}\end{pmatrix}。$$

十.（10分）设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶正定矩阵，则

$$0<|A|\leq\prod_{i=1}^{n}a_{ii},$$

且等号成立当且仅当A为对角矩阵。