河南师范大学

2017年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码与名称：801 高等代数

适用专业或方向：数学各专业

考试时间：3 小时　满分：150 分　　　　试题编号：A卷试题

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一、填空题（每小题 5 分，共 30 分）

1. 设 $f(x)=x^3-7x^2+7x+15$，$g(x)=x^2-x-20$，则它们的最大公因式为 $(f(x),g(x))=$ ________________。

2. 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-4\\-8\\k\end{pmatrix}$ 线性相关，则 $k=$ ________________。

3. 设 u_0 为线性方程组 $AX=b$ 的一个特解，v_1,v_2 为其导出组 $AX=0$ 的一个基础解系，则线性方程组 $AX=b$ 的通解为 $u=$ ________________。

4. 实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&2t\\-1&2t&5\end{pmatrix}$ 为正定矩阵，则 t 的取值范围是________________。

5. 设 A 为 3 阶正交阵，且 $|A|<0$，B 为 3 阶方阵，且 $|B-A|=4$，则行列式 $|E-AB'|$ 的值为________________。（其中 E 为单位矩阵，B' 为 B 的转置矩阵）

6. 在欧氏空间 R^4 中（内积按通常定义），向量 $\alpha=(0,0,1,1),\beta=(0,1,1,0)$ 之间的夹角为________________。

二、计算题（每小题 15 分，共 45 分）

1．求线性方程组$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3 \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7 \end{cases}$的通解（要求用一特解及其导出组的基础解系表示其全部解）。

2．试求一个正交矩阵，将下列实对称矩阵相似化为对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}。$$

3．在$P^{2\times 2}$中，设$\alpha_1=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$，求生成子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$的一组基，并将它扩充为$P^{2\times 2}$的基。

三、（15 分）设m,n,p为任意非负整数，证明：x^2+x+1整除$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$。

四、（20 分）证明

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x_1y_1 & a_{12}+x_1y_2 & \cdots & a_{1n}+x_1y_n \\ a_{21}+x_2y_1 & a_{22}+x_2y_1 & \cdots & a_{2n}+x_1y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x_ny_1 & a_{n2}+x_ny_2 & \cdots & a_{nn}+x_ny_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jA_{ij}$$

其中A_{ij}是a_{ij}的代数余子式。

五、（20 分）（1）设A,B分别为$m\times n$和$n\times m$矩阵，证明：若矩阵E_n+BA可逆，则矩阵E_m+AB也可逆，并且$(E_m+AB)^{-1}=E_m-A(E_n+BA)^{-1}B.$

（2）设A是n阶可逆阵，α,β是n维列向量，证明:当$A+\alpha\beta'$可逆时，

$$\left(A+\alpha\beta'\right)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\alpha\beta' A^{-1}}{1+\beta' A^{-1}\alpha}。$$

六、（20 分）设V为数域P上的n维线性空间，σ是V的一个线性变换，且有$\xi\in V$使得$\sigma^{n-1}\xi\neq 0$，而$\sigma^{n}\xi=0$.

（1）证明：$\xi,\sigma\xi,\cdots,\sigma^{n-1}\xi$也为$V$的一组基；

（2）证明：σ^{n}必为零变换。