中国·新乡 河南师范大学

2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码与名称：611 数学分析

适用专业或方向：数学各方向

考试时间：3 小时　满分：150 分　　试题编号：A 卷试题

（必须在答题纸上答题，在试卷上答题无效，答题纸可向监考老师索要）

一．（16分，每小题8分）求下列极限：

1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n-1)}$；

2）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]$.

二．（16分）证明当 $x>1$ 时有 $\frac{x}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{\ln x}$.

三．（16 分）设 $f(t)$ 在 $[0,x]$ $(x>0)$ 上连续，在 $(0,x)$ 内可导，且 $f(0)=0$，证明存在 $\xi\in(0,x)$ 使得 $f(x)=(1+\xi)f'(\xi)\ln(1+x)$.

四．（17 分）设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为 2，求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^{4n-2}$ 的收敛区间.

五．（17 分）求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x}$ 的收敛域，并说明该级数在其收敛域内是否一致收敛.

六．（17 分）求曲线积分 $I=\oint_L(z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$，其中 L 是 $x^2+y^2=1$ 与 $x-y+z=2$ 的交线，且从 z 轴正向往下看 L 是顺时针方向.

七.（17 分）设 $\alpha(x,y)$ 和 $f(x)$ 都是可微函数，且 $z=z(x,y)$ 由下列方程组

$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z = f(\alpha); \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha). \end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $I=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-z^2$.

八.（17 分）求 $\iiint\limits_V (x+z)dxdydz$，其中 V 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围的立体。

九.（17 分）设对每个 $n\geq 1$，$f_n(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且对任意的 $M>a$ 都有 f_n 在 $[a,M]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$，如果 $\forall\varepsilon>0$，总存在正数 $N(\varepsilon)$，使得当 $D>N(\varepsilon)$ 时恒有 $\left|\int_D^{+\infty} f_n(x)dx\right|<\varepsilon$ 对一切 $n\geq 1$ 成立，证明 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{+\infty} f_n(x)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$