沈阳工业大学

# 2020年博士研究生招生考试题签

（请考生将题答在试题纸上，使用“学习通”APP拍照上传）

**科目名称：数值分析** 

**一、（20分，每空2分）填空题**

1、 设 $f(x)=4x^4-3x^3+2x^2+1$，取等距节点 $x_k=0.1+kh\ (k=0,1,\cdots,5)$，其中步长 $h=0.1$，则差分 $\Delta^4 f_0=$____________，$\Delta^5 f_0=$____________。

2、 勒让德多项式是区间____________上权函数 $\rho(x)\equiv 1$ 的正交多项式，其表达式为______________。

3、 求积分 $I=\int_a^b f(x)dx$ 的梯形公式为_____________，梯形公式具有_________次代数精度。

4、 设向量 $x\in R^n$，矩阵 $A\in R^{n\times n}$，$\|x\|_v$ 是给定的一种向量范数，则由此向量范数导出的矩阵 $A$ 的算子范数为 $\|A\|_v=$_________，矩阵范数 $\|A\|_v$ 与向量范数 $\|x\|_v$ 相容指的是_____________。

5、 设有方程 $f(x)=0$，则求该方程单根的牛顿法的迭代格式为______________，若 $x^*$ 是此方程的重根，且已知重数为 $m$，则求 $x^*$ 的具有二阶收敛性的牛顿法迭代格式为_______________。

**二、（16分）简答题**

1、设有积分 $I=\int_a^b \rho(x)f(x)dx$，其中 $\rho(x)$ 是权函数，$I_n=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$ 是求积分 $I$ 的插值型求积公式。

（1）给出 $I_n$ 为高斯求积公式的充分必要条件；（4分）

（2）说明高斯求积公式有哪些优点。（4分）

2、设矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量，特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 满足 $|\lambda_1|>|\lambda_2|>\cdots>|\lambda_{n-1}|>|\lambda_n|>0$。

（1）写出求特征值 $\lambda_n$ 及其对应特征向量 $x_n$ 的反幂法的迭代公式；（4分）

（2）给出反幂法的收敛结果。（4分）

**三、（44分）计算题**

1、 给定节点 $x_0=-2$，$x_1=1$，$x_2=3$，$x_3=4$，以及节点处函数值 $f(x_0)=3$，$f(x_1)=6$，$f(x_2)=-2$，$f(x_3)=9$。请列出均差表，并写出 $f(x)$ 的三次牛顿插值多项式。（6分）

2、 对于下面给定的数据 $(x_i, y_i)$, $i=1,2,3,4,5$ 和给定的权 $\omega_i$, $i=1,2,3,4,5$，利用最小二乘法求形如 $p(x)=a+bx^2$ 的拟合多项式。（10 分）

| $x_i$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 |
| $\omega_i$ | 0.1 | 0.2 | 0.4 | 0.2 | 0.1 |

3、 设有方程组

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+2x_3=3 \\ x_1+2x_2+x_3=4 \\ x_1+x_2+2x_3=6 \end{cases}$$

（1）用直接三角分解法求解该方程组；（10 分）
（2）写出解此方程组的逐次超松弛迭代法的迭代格式；（3 分）
（3）判断解此方程组的高斯-塞德尔迭代法的敛散性。（5 分）

4、已知常微分方程初值问题如下

$$\begin{cases} y'=x^2+x-y \quad (0\le x\le 0.5) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

（1）写出求解此问题的欧拉公式，并取步长 $h=0.1$，计算 $y_1$ 和 $y_2$；（5 分）

（2）写出求解此问题的改进欧拉公式，并取步长 $h=0.1$，计算 $y_1$。（5 分）

**四、（20 分）证明题**

1、 设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上的 4 阶导数连续，$H_3(x)$ 是关于节点 $x_0$ 和 $x_1$ 的三次埃尔米特插值多项式，满足 $H_3(x_k)=f(x_k)$，$H_3'(x_k)=f'(x_k)$，$k=0,1$，证明：对于任意的 $x\in[x_0,x_1]$，都有

$$f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$，其中 $\xi\in(x_0,x_1)$ 且与 $x$ 有关。 （6 分）

2、 设有积分 $I=\int_a^b f(x)dx$， 被积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$S_n$ 是将区间 $[a,b]$ 作 $n$ 等分之后所得的复化辛普森求积公式。请推导 $S_n$ 的表达式，并证明 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = I$。 （6 分）

3、 已知方程 $x^3+2x-1=0$ 在区间 $[0,1]$ 内有唯一的实根 $x^*$，给定迭代公式 $x_{k+1}=\dfrac{2x_k^3+1}{3x_k^2+2}$，$k=0,1,2,\cdots$。

（1）证明：此迭代公式在根 $x^*$ 邻近至少是二阶收敛的； （3 分）

（2）证明：对于任意的初值 $x_0\in[0,1]$，此迭代公式均收敛于 $x^*$。 （5 分）