北京化工大学
攻读硕士学位研究生入学考试
《数学分析》样题

注意事项

1. 答案必须写在答题纸上，写在试卷上均不给分。
2. 答题时可不抄题，但必须写清题号。
3. 答题必须用蓝、黑墨水笔或圆珠笔，用红色笔或铅笔均不给分。

一、选择题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。把所选项前的字母填在题后的括号内。）

1. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则结论**不正确**的是：

（A） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

（B） 至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$， $f(x)$ 在 x_0 点可导。

（C） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续。

（D） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

[　　]

2. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导且严格单调增加，则结论**不正确**的是：

（A） 在 (a,b) 内 $f'(x) > 0$ 。

（B） 必存在 $f(x)$ 的反函数，它也是严格单调增加的。

（C） $f(x)$ 在 (a,b) 连续。

（D） $f(\frac{2a+b}{3}) < f(\frac{a+2b}{3})$ 。

[　　]

3. 若 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ 均在点 (x_0,y_0) 存在，则

（A） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续。

（B） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微。

（C） $u = f(x,y_0)$ 作为 x 的函数在 x_0 点可微。

（D） $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域有界。

[　　]

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则

（A） $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛。

（B） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛。

（C） $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛。

（D） $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+2})$ 收敛。

[ ]

5. 下列结论**正确**的是：

（A） 如果 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积。

（B） 若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则 $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ 在 $[c,d]$ 上一致连续。

（C） 若函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 D 有连续的偏导数，$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立，

则对任一全部含于 D 内的闭路 C，$\oint_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$。

（D） 函数列 $\{2n^2 x e^{-n^2x^2}\}$ 在 $(0,1)$ 一致收敛。

[ ]

二、（本题共 8 小题，每小题 7 分，满分 56 分）

1． 求 $\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]^{\frac{1}{\sin x}}$

2． 设 $y=f(x)$ 满足 $y+e^y=x+1$，求曲线 $y=2f(x)+x$ 过点 $(0,0)$ 的法线。

3． 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin^2 x\,dx$。

4． 计算 $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外表面。

5． 求函数 $f(x,y)=2x^2+y^2$ 在条件 $x+y=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ 下的最大值及其最大值点。

6． 计算 $\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}dxdy$，其中 D 由抛物线 $y=x^2$，直线 $x=1$ 和 x 轴所围成。

7． 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\int_0^{2\sin x} e^{-t^2}\tan t\,dt}$

8． 将 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成富里埃（Fourier）级数，并求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ 的值。

三、（本题满分 10 分）

证明：$1-\frac{1}{3!\times3}+\frac{1}{5!\times5}-\frac{1}{7!\times7}<\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx<1-\frac{1}{3!\times3}+\frac{1}{5!\times5}-\frac{1}{7!\times7}+\frac{1}{9!\times9}$

四、（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在点 x_0 可导，$g(y)$ 在点 y_0 可导，$h(x,y)=f(x)g(y)$，试证 $h(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微。

五、（本题满分 15 分）

设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导且 $f''(x)>0$，试证 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界。

六、（本题满分 10 分）

证明：若 φ 在区间 $[a,b]$ 上连续，f 在 φ 的值域上二阶可导且 $f''(x)\geq 0$，则有

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varphi(t))dt \geq f(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)dt)$$

七、（本题满分 10 分）

设光滑曲面 Σ_1 和 Σ_2 的方程分别为 $f(x,y,z)=0$ 和 $g(x,y,z)=0$，Σ_1 和 Σ_2 不相交，M 和 N 分别属于 Σ_1 和 Σ_2 的内部，M 至 N 的距离等于 Σ_1 至 Σ_2 的最短距离，证明：Σ_1 在 M 点的切平面与 Σ_2 在 N 点的切平面平行，并且 $\overrightarrow{MN}$ 是它们的法向量。

八、（本题满分 14 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 可导且 $f(a)=0\ \ (a>0)$，试证对任意自然数 n，均存在 $\xi\in(0,a)$ 使得 $f(\xi)+\frac{1}{n}\xi f'(\xi)=0$。