沈阳工业大学

2019年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称：高等代数

一、（60分，每小题6分）判断对错并简述理由。

1. 若整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域可约，则 $f(x)$ 一定有有理根。

2. 设 n 阶行列式 D 中等于零的元素的个数大于 (n^2-n)，则 $D=0$.

3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 的秩为 3.

4. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=0 \\ x_1+ax_2+3x_3=0 \\ 3x_1-4x_2+x_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 $a=-4$.

5. 若非齐次线性方程组 $AX=b$ 的导出组 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 有唯一解。

6. 设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2=A$，则 $A+E$ 可逆。

7. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，C 与 n 阶单位矩阵等价，且 $B=AC$．设 $R(A)$ 表示矩阵 A 的秩，则 $R(B)<R(A)$.

8. 如果矩阵 A 可逆，则 AB 与 BA 相似。

9. 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $t=5$

10. 设 P 是 n 阶正交矩阵，则行列式 $|P|=1$.

二、（10分） 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1+a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2+a & \cdots & x_n \\ & \cdots & \cdots & \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n+a \end{vmatrix}$.

三、（12分） 问 λ,μ 取什么值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4=\lambda \\ x_2+x_3+3x_4=-2 \\ 4x_1+5x_2+5x_3+7x_4=\mu \end{cases}$ 有解？有无穷多解时，求一般解.

沈阳工业大学

2019年硕士研究生招生考试题签

（请考生将题答在答题册上，答在题签上无效）

科目名称： 高等代数

四、（8分）设A,B均为n阶可逆矩阵，证明：若$A+B$可逆，则$A^{-1}+B^{-1}$也可逆。

五、（12分）设$R^{3\times3}$表示实数域上所有3×3矩阵依矩阵加法和数乘运算构成的线性空间，求所有与A可交换（即满足$AB=BA$）的矩阵B组成的线性子空间的维数与一组基，其中

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&2&1\end{bmatrix}.$$

六、（10分）设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出，证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关的充要条件是$\beta$被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$表出的表式唯一。

七、（10分） 设$P^{n\times n}$表示数域P上所有$n\times n$矩阵依矩阵加法和数乘运算构成的线性空间，$P^{n\times n}$的子空间$V_1=\left\{A\middle|A^T=A,A\in P^{n\times n}\right\}$，$V_2=\left\{A\middle|A^T=-A,A\in P^{n\times n}\right\}$，其中$A^T$表示$A$的转置矩阵。证明：$P^{n\times n}=V_1\oplus V_2$.

八、（10分）求下列实二次型的正惯性指数与符号差：$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2-x_3^2+4x_1x_2$.

九、（10分）在$P^{2\times2}$中定义线性变换：$\sigma(X)=XM$，其中$M=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$.（1）求$\sigma$在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵（其中$E_{ij}$为第$i$行$j$列元素为1，其余元素为0的2阶方阵）。（2）求$\sigma$的特征值与特征向量。

十、（8分）设A为n（$n\geq2$）阶复矩阵，且$R(A)=1$，求A的若尔当标准形。