浙江工商大学 2019 年全国硕士研究生入学考试试卷（B）卷

考试科目：601 数学分析　　总分：（150 分）　　考试时间：3 小时

一、计算题（每小题 10 分，共 90 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

2. 叙述函数 $y=f(x)$ 在一点连续的定义，并确定 a 的值使函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$$ 在 $x=0$ 处连续.

3. 计算 $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点处的二个偏导数，进而说明在原点处的可微性.

4. 求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0$ 下的极值.

5. 计算定积分（1）$\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$；（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x$.

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的和函数，并指出它的收敛区间.

7. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=\pi,\\ -x^2, & \pi<x\leq 2\pi\end{cases}$$

展开为傅立叶级数，并推出

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots.$$

8. 计算 $I=\iiint\limits_V(x^2+y^2+z)dxdydz$，其中 V 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围的区域.

9. 验证积分 $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 与路径无关（沿不通过原点的路径），并求它的值.

二、证明题（每小题 15 分，共 60 分）

1．证明不等式 $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2(1+x)}$，$x>0$.

2．证明数列$\{a_n\}$，其中$a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}}$收敛，并求极限.

3．证明函数列 $f_n(x)=nxe^{-nx^2}$，$n=1,2,\cdots$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

4．若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上连续，且 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，举例说明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 不一定成立；若将“条件 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上连续”改为“$f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上一致连续”，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.