

扬州大学

2020年硕士研究生招生考试初试试题 (A卷)

科目代码 840 科目名称 数学分析与高等代数综合

满分 150

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

(数学分析部分)

1. (10分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$.

2. (10分) 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^n}.$$

3. (10分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上连续, 在 $(0, 4)$ 内可导, 且 $f(0) = 2$,

$$f(2) = 1, f(4) = 3, \text{ 证明存在 } \xi \in (0, 4) \text{ 使得 } f'(\xi) = 0.$$

4. (15分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$ 的收敛域、和函数并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

5. (15分) 设 $f(x)$ 定义在 $[0, 1]$ 上且满足:

$$|f(x') - f(x'')| \leq |\arctan x' - \arctan x''|, x', x'' \in [0, 1]. \text{ 证明}$$

(1) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积;

(2) 若 $f(1) = 0$, 则 $|\int_0^1 f(x) dx| \leq \frac{1}{2} \ln 2$.

6. (15分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且存在常数 $M > 0$

使得 $|xf'(x) - f(x)| \leq Mx^2, x \in (0, 1)$. 试证:

(1) $\frac{f(x)}{x}$ 在内一致连续, 且 $f(0) = 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ 存在.

(高等代数部分)

7. (15分) 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 个线性无关的列向量, 满足:

$$A\alpha_1 = -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, A\alpha_2 = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3,$$

(1) 证明: A 是可逆方阵; (2) 求 $|3A - 4E_3|$ (这里 E_3 是 3 阶单位矩阵).8. (15分) 设 A, B, C 为一个直角三角形的三个内角,(1) 设 $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, 写出二次型 $f(x, y, z) = (x \ y \ z)G \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 的矩阵;(2) 证明: 对任意实数 x, y, z , 有 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy \cos A + 2xz \cos B + 2yz \cos C$.9. (15分) 设 $A = \begin{pmatrix} -4 & -10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, (1) 求 A 的全体特征值及特征向量; (2) 求 A^{100} .10. (15分) (1) 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, 证明齐次线性方程组 $AX = 0$ 与 $A^T AX = 0$ 同解;(2) 若 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, 求满足 $AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的全体矩阵 X .11. (15分) 设 A, B, C 是 n 阶复方阵, 满足 $A = A^2 B = CA^2$, 证明:(1) $AB = CA$; (2) 证明存在 n 阶复方阵 D , 满足 $A = ADA, D = DAD, AD = DA$.