

变截面悬臂箱梁剪力滞效应的比拟杆分析方法

郭增伟 李龙景 张俊波

(重庆交通大学, 重庆 400074)

摘要: 针对传统比拟杆法仅能分析等截面箱梁剪力滞效应的不足, 重新推导变截面箱梁加劲杆等效面积及剪力滞效应微分方程, 以有机玻璃悬臂梁模型的试验结果检验该文算法的正确性, 讨论箱梁梁高、腹板厚度变化对悬臂箱梁剪力滞系数和正剪力滞区段长度的影响, 通过分析箱梁顶板和腹板内剪力流沿跨长的分布规律揭示变截面箱梁剪力滞效应弱化的原因。研究发现: 悬臂箱梁梁高和腹板厚度的变化会减弱其剪力滞效应, 且剪滞效应弱化的原因在于变截面箱梁腹板内剪应力水平的降低; 箱梁顶板内水平剪力流沿跨长先增大后减小的变化导致了悬臂箱梁正、负剪力滞现象, 同等跨径下变高度悬臂箱梁的正剪力滞区段长度会显著增加, 但其剪滞系数将明显减小; 工程设计中可以通过调整箱梁梁高和腹板厚度沿顺桥向的变化趋势, 尽量让箱梁腹板剪力流水平沿桥跨方向保持不变, 避免腹板剪力流水平变化过快以最大程度地减弱箱梁剪力滞效应。

关键词: 桥梁; 变截面箱梁; 悬臂梁; 剪力滞效应; 比拟杆法

中图分类号: U441.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-131X(2019)08-0072-09

Theoretical analysis for shear-lag effect of variable box section cantilever girder based on bar simulation method

Guo Zengwei Li Longjing Zhang Junbo

(Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: By the traditional bar simulation method, only the shear lag effect of box girder with constant section can be analyzed. To improve the applicability of the existing method, a new equivalent method of analogy bar areas and governing differential equations of shear lag effect was derived for the variable box-section girder. It was further validated by the test results of a cantilever beam made of Perspex. The effects of girder depth and web thickness on the shear lag of box girder, including shear lag coefficients and span lengths of positive shear lag region, were discussed. The reason why the shear lag effect of variable box-section girder was weaker than that of constant section girder were illustrated by analyzing the distribution of shear flow in web and flange of box girder along span direction. The results show that the variation of girder depth and web thicknesses will reduce the shear lag effect of box girder, which is attributed to the reduction of shear stress level in webs of variable box-section girder. It is the firstly increasing and then decreasing trend of shear flows in flange of box girder that cause the variation of positive and negative shear lag phenomenon. The span length of positive shear lag region in variable section box girder will increase, but the maximum shear lag coefficient may decrease. It is recommended that the height and web depth should be adjusted to avoid the drastic variety of shear follow in the web of box girder. The constant or gradually changing shear flow in box-girder webs may effectively depress the shear lag effect of box girder.

Keywords: bridge; variable box-section girder; cantilever beam; shear lag effect; bar simulation method

基金项目: 国家自然科学基金(51878106, 51478072)、重庆市前沿与应用基础研究项目(cstc2015jcyjBX0022)、桥梁结构抗震技术交通行业重点实验室开放基金(201501)和重庆市教委科学技术研究项目(KJ1400333, KJ1600531)

作者简介: 郭增伟, 博士, 副教授

收稿日期: 2018-08-31

E-mail: zengweigu@cqjtu.edu.cn

引 言

薄壁箱梁在竖向荷载作用下发生弯曲变形时，上、下翼板剪切变形导致翼板纵向弯曲正应力沿横截面不均匀分布，产生剪力滞现象。然而目前梁桥的设计方法仍是利用杆系有限元软件的分析结果，并按照不同设计荷载工况的组合效应对组成桥梁结构的每一个构件进行配筋设计和验算。由于平截面假定的限制，基于杆系有限元的结构内力分析结果不能反映箱梁剪力滞效应，因此公路桥梁设计规范提出翼板有效分布宽度的概念来考虑翼板的剪力滞效应，但规范并未明确箱梁截面沿纵桥向的变化对有效翼缘宽度的影响。

目前箱梁剪力滞效应的理论分析方法主要有能量变分法和比拟杆法，能量变分法利用最小势能原理建立“积分格式的平衡方程”，计算精度依赖于事先假设的梁“位移函数”^[1-6]；比拟杆法利用微元体平衡条件建立“微分格式的平衡方程组”，计算精度依赖于微分方程组的数值求解精度。两种方法在计算等截面箱梁剪力滞效应方面已有较多的研究成果，但变截面箱梁剪力滞效应的理论分析成果相对较少^[7-9]。罗旗帜等^[10]用能量变分法推导了箱梁剪力滞效应控制方程，建立了考虑剪滞剪切效应的有限段模型，并以有限段模型结果与有机玻璃模型试验结果和实体有限元法的数值结果进行对比，结果吻合良好。张元海等^[11]针对变截面箱梁的剪力滞效应，在引入剪滞广义力矩及翘曲几何特性的基础上提出一种改进的梁段有限元法，通过变高度有机玻璃箱梁模型梁段有限元计算值和测试结果的对比，验证了所提出的梁段单元用于分析变截面箱梁的剪力滞效应的可靠性。韦成龙等^[12]基于能量原理提出一种研究变截面连续箱梁桥剪力滞后效应的传递矩阵法，建立了相应的场矩阵和点矩阵，从而实现变截面连续箱梁桥内力、应力及位移的一维递推求解。

比拟杆法作为一种传统剪力滞效应分析方法，将箱梁比拟为仅承受轴力的理想加劲杆和其间仅承受面内剪力的薄板组成的结构体系，通过等效加劲杆的平衡方程和协调方程建立翼板剪力滞效应的微分方程，与其他方法相比，力学概念明确、模型简单、计算精度高，同时可通过加密加劲杆的数量提高计算精度，通过减少加劲杆的数量简化计算，当

顶(底)板的等效加劲杆数量减少到 3 根加劲杆时，便可以得到解析解。程翔云等^[13]应用比拟杆法推导了单箱单室箱梁剪力滞效应控制微分方程，并分析了单箱单室箱梁在竖向对称荷载下的剪力滞效应，结果表明比拟杆法计算精度尚佳。赵志峰等^[14]采用比拟杆法分析了简支梁、悬臂梁的剪力滞效应并与有机玻璃模型试验解和板壳有限元解比较，结果表明比拟杆法具有较好的计算精度，但目前针对比拟杆的研究多以等截面结构为对象。本文从更广义的角度重新推导整理比拟杆法的基本方程，并通过推导变截面箱梁腹板内剪力流的计算公式实现了变截面箱梁剪力滞效应的精确求解，通过对微分方程中过程变量的分析，加深了对变截面箱梁剪力滞效应的认识和理解。

1 变截面箱梁剪力滞效应微分方程

1.1 比拟杆等效模型中加劲薄板等效厚度和加劲杆等效面积

比拟杆等效模型将箱梁模型等效为仅承受轴力的理想加劲杆和其间仅传递面内剪力的薄板组成的结构体系，即将图 1 所示的箱梁等效为图 2 所示的加劲杆-薄板结构体系（为方便叙述，上、下翼缘板分别等效为 9 根、5 根加劲杆）。以箱梁顶、底板弯曲应力相等为原则计算理想加劲杆的等效面积和薄板的等效厚度，再根据理想加劲杆与翼板处薄板

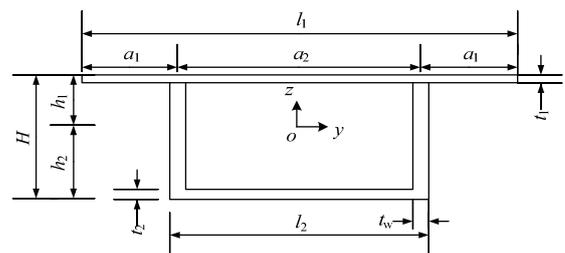


图 1 单箱单室箱梁截面

Fig.1 Single cell box girder

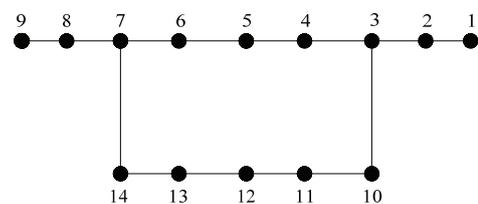


图 2 加劲杆-薄板等效结构体系

Fig.2 Equivalent structure of stiffing bar-plate system

及腹板处薄板之间的平衡条件和变形协调条件建立微分方程，通过加劲杆的内力来代表翼板中的弯曲正应力。

建立比拟杆等效模型时，文献[13-14]按照箱梁顶、底板弯曲应力相等原则建立包含腹板等效系数（ α_1 、 α_2 ）和加劲薄板厚度等效系数（ β_1 、 β_2 ）4个未知数的联立方程组，由于未知数个数多于方程数量，在求解时需要引入两个“主观”附加方程，但物理意义并不明确“附加方程”直接影响加劲杆等效面积和内力的分配。本文首先按照箱梁顶板和底板相对于截面形心抗弯刚度相等的原则求解加劲杆薄板的等效厚度，而在加劲薄板等效厚度已知的情况下按照箱梁顶、底板弯曲应力相等的原则计算腹板等效系数（ α_1 、 α_2 ）以获得不同位置处加劲杆等效面积。当箱梁截面沿桥梁展向(x方向)发生变化时，加劲薄板等效厚度将沿桥梁展向发生变化，加劲薄板的等效厚度 $t_{1e}(x)$ 、 $t_{2e}(x)$ 可表示为：

$$t_{1e}(x) = \left(1 - \frac{t_1(x)}{2h_1(x)}\right)^2 t_1(x) \quad (1)$$

$$t_{2e}(x) = \left(1 - \frac{t_2(x)}{2h_2(x)}\right)^2 t_2(x) \quad (2)$$

式中： x 为箱梁截面的跨径方向的位置； $t_1(x)$ 为箱梁顶板厚度； $t_2(x)$ 为箱梁底板厚度； $h_1(x)$ 、 $h_2(x)$ 分别为箱梁顶板顶缘、底板底缘距离截面形心的竖向距离。

对于不与腹板相交的加劲杆 $i(i=1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13)$ ，仅需将其代表的翼板面积“凝聚”至加劲杆 i ，使用式(3)、式(4)计算顶板和顶板处加劲杆的等效面积 $A_{1ei}(x)$ 和 $A_{2ei}(x)$ ：

$$A_{1ei}(x) = t_{1e}(x)(y_{i+1} - y_{i-1})/2 \quad (3)$$

$$A_{2ei}(x) = t_{2e}(x)(y_{i+1} - y_{i-1})/2 \quad (4)$$

式中： y_{i+1} 、 y_{i-1} 分别为第 $i+1$ 、 $i-1$ 号加劲杆距离形心的横向距离，当 $i-1=0$ 时表明 $i-1$ 号杆件不存在，与之相应的变量即为0。

对于与腹板相交的加劲杆 $j(j=3, 7, 10, 14)$ ，除“凝聚”该区域的翼板面积外，还需按照抗弯刚度等效的原则将箱梁腹板区域的面积按比例分配于该位置处的加劲杆，使用式(5)、式(6)计算其等效面积 $A_{1ej}(x)$ 和 $A_{2ej}(x)$ ：

$$A_{1ej}(x) = 2\alpha_1 H(x)t_w(x) + t_{1e}(x)(y_{i+1} - y_{i-1})/2 \quad (5)$$

$$A_{2ej}(x) = 2\alpha_2 H(x)t_w(x) + t_{2e}(x)(y_{i+1} - y_{i-1})/2 \quad (6)$$

$$\alpha_1(x) = \frac{\frac{I(x)}{H(x)h_1(x)} - (2a_1 + a_2)t_{1e}(x)}{2H(x)t_w(x)} \quad (7)$$

$$\alpha_2(x) = \frac{\frac{I(x)}{H(x)h_2(x)} - a_2 t_{2e}(x)}{2H(x)t_w(x)} \quad (8)$$

式中： $H(x)$ 为梁高； $t_w(x)$ 为腹板厚度； $\alpha_1(x)$ 为腹板的上翼板面积等效系数； $\alpha_2(x)$ 为腹板的下翼板面积等效系数； $I(x)$ 为箱梁主惯性矩； a_1 为顶板最外侧至腹板中心位置的横向距离； a_2 为两腹板中心位置的横向距离。

1.2 剪力滞效应控制方程的建立

传统的比拟杆法在建立剪力滞效应控制方程时，是将平衡方程、协调方程、以及物理方程联立推导出关于翼板剪力流函数的二阶微分方程组^[13-14]。而当箱梁截面沿桥梁展向发生变化时，各加劲杆的面积沿桥梁展向将发生变化，建立微分方程时将产生关于截面面积的微分形式，无法消除多余未知数，造成求解困难，为此本文将平衡方程、协调方程、以及物理方程联立成关于加劲杆轴力和翼板剪力流函数的一阶微分方程组并直接求解。

以如图3所示的箱梁上翼缘板为例，根据每根加劲杆上轴力与两侧薄板内剪力的平衡关系建立如式(9)的平衡方程，并根据加劲杆轴向变形和两侧薄板剪切变形的协调条件建立如式(10)所示的协调方程。

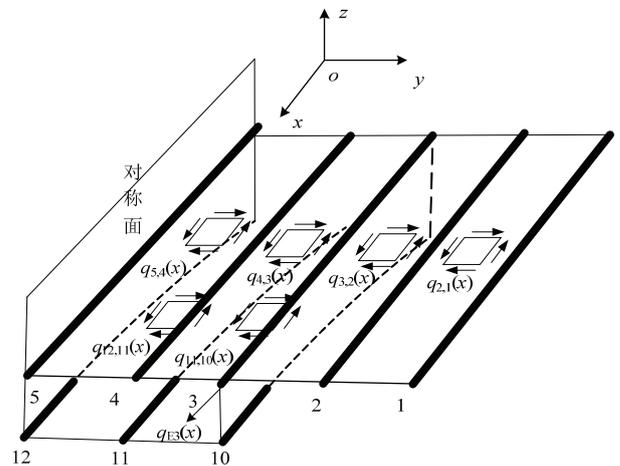


图3 加劲杆-薄板结构受力示意图

Fig.3 Schematic diagram for force equilibrium of bar-plate system

$$\frac{dN_i(x)}{dx} = q_{i,i+1}(x) - q_{i,i-1}(x) - q_{Ei}(x) \quad (9)$$

$$\frac{dy_{i,j-1}(x)}{dx} = \frac{1}{Ed_{i,j-1}} \left(\frac{N_i(x)}{A_{1ei}(x)} - \frac{N_{i-1}(x)}{A_{1ei-1}(x)} \right) \quad (10)$$

式中：下标 i 表示顶板第 i 根加劲杆，当 $i-1=0$ 时表

明 $i-1$ 号杆件不存在, 与之相关的变量即为 0; E 为弹性模量, $N_i(x)$ 表示顶板第 i 根加劲杆的轴力, A_{1ei} 表示顶板第 i 根加劲杆的面积, $d_{i,i-1}$ 表示顶板第 i 根和第 $i-1$ 根加劲杆之间水平距离, 需要说明的是截面腹板处相邻加劲杆的距离应减去腹板一半的宽度作为最终的加劲杆杆间间距; $q_{i,i-1}(x)$ 和 $\gamma_{i,i-1}(x)$ 分别表示顶板第 i 根和第 $i-1$ 根加劲杆之间薄板的面内剪力流函数和剪应变函数, $q_{Ei}(x)$ 表示箱梁腹板内剪力流函数, 当加劲杆与腹板不相交时 $q_{Ei}(x)=0$ 。考虑到顶板第 i 根和第 $i-1$ 根加劲杆之间薄板的面内剪力流和剪应变满足如式 (11) 所示的物理方程,

$$q_{i,i-1}(x) = \gamma_{i,i-1}(x)t_1(x)G \quad (11)$$

式中: G 为剪切模量。联立式 (9) ~ 式 (11) 即可得到顶板剪力滞效应控制方程:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(x)}{dx} = q_{2,1}(x) \\ \frac{dN_2(x)}{dx} = q_{3,2}(x) - q_{2,1}(x) \\ \frac{dN_3(x)}{dx} = q_{4,3}(x) - q_{3,2}(x) - q_{E3}(x) \\ \frac{dN_4(x)}{dx} = q_{5,4}(x) - q_{4,3}(x) \\ \frac{dN_5(x)}{dx} = -q_{5,4}(x) \\ \frac{dq_{2,1}(x)}{dx} = \frac{t_1(x)G}{Ed_{2,1}} \left(\frac{N_2(x)}{A_{1e2}(x)} - \frac{N_1(x)}{A_{1e1}(x)} \right) \\ \frac{dq_{3,2}(x)}{dx} = \frac{t_1(x)G}{Ed_{3,2}} \left(\frac{N_3(x)}{A_{1e3}(x)} - \frac{N_2(x)}{A_{1e2}(x)} \right) \\ \frac{dq_{4,3}(x)}{dx} = \frac{t_1(x)G}{Ed_{4,3}} \left(\frac{N_4(x)}{A_{1e4}(x)} - \frac{N_3(x)}{A_{1e3}(x)} \right) \\ \frac{dq_{5,4}(x)}{dx} = \frac{t_1(x)G}{Ed_{5,4}} \left(\frac{N_5(x)}{A_{1e5}(x)} - \frac{N_4(x)}{A_{1e4}(x)} \right) \end{cases} \quad (12)$$

由式 (12) 中可知, 腹板内剪力流的大小直接影响了加劲杆轴力的求解结果及相应位置处顶底板的弯曲正应力水平, 文献[15]研究结果表明悬臂箱梁腹板剪力朝固端方向增加越快, 翼板剪力滞效应越显著, 其实质是截面剪力变化引起的腹板与顶板交界处水平剪力流的变化所导致的, 而变截面箱梁内由弯矩引起的附加剪应力对腹板剪应力影响显著^[16], 这势必导致变截面箱梁的剪力滞系数与等截面箱梁的不同。考虑到本文中变截面比拟杆等效梁的特殊性, 本文以变截面比拟杆等效梁分离体的力矩平衡方程对剪力流公式重新推导。取变截面比拟杆等效梁自由端至 x 处的①号隔离体(如图 4 所示)。

悬臂梁在均布荷载作用下顶板各加劲杆承受的总的轴力为 $N_u(x)$, 腹板对顶板作用的水平剪力流为 $q_{Ei}(x)$, 由水平方向上力的平衡可知:

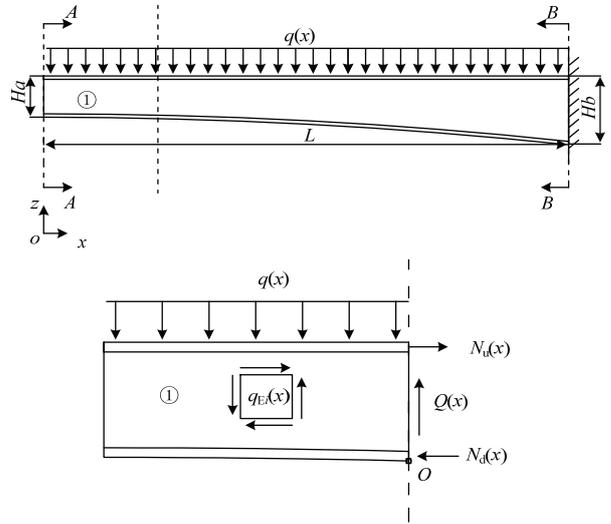


图 4 悬臂梁构造及隔离体受力简图

Fig.4 Cantilever beam and its free-body diagram

$$N_u(x) = 2 \int_0^x q_{Ei}(x) dx \quad (13)$$

对于 O 点建立力矩平衡方程:

$$M(x) = N_u(x)H(x) = q(x)x^2 / 2 \quad (14)$$

由式 (13)、式 (14) 可得腹板与顶板交界处的水平剪力流 $q_{Ei}(x)$

$$\begin{aligned} q_{Ei}(x) &= \frac{1}{2} \frac{dN_u(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{M(x)}{H(x)} \\ &= \frac{Q(x)}{2H(x)} - \frac{M(x)}{2H(x)^2} \frac{dH(x)}{dx} \\ &= \frac{Q(x)S_1(x)}{I(x)} + M(x) \left(\frac{1}{I(x)} \frac{dS_1(x)}{dx} - \frac{S_1(x)}{I(x)^2} \frac{dI(x)}{dx} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $M(x)$ 为 x 处的弯矩; $Q(x)$ 为 x 处的剪力; $S_1(x)$ 为顶板等效面积对截面形心轴的静面矩。式(15)与文献[16]中计算得到的剪力流一致, 需要说明的是文献[16]是利用梁体腹板微元体的平衡方程, 求解腹板任一点处的剪应力并在截面内进行积分得到的, 而本文是基于腹板隔离体整体平衡推导出的。当箱梁截面不发生变化时, 式 (15) 将蜕化成材料力学中传统的剪应力计算公式。

对于无外界约束且无荷载作用的自由端 (如悬臂梁自由端), 各加劲杆上轴力 $N_i(x)$ 为 0, 其边界条

件可表示为:

$$N_i(0)=0 \quad (16)$$

对于嵌固端 (如悬臂梁嵌固端), 各加劲薄板由于外界约束不能发生剪切变形, 由式 (11) 可知其边界条件可表示为:

$$q_{i,i-1}(L)=0 \quad (17)$$

对于铰接的边界条件, 可以将支承反力求出后以外荷载的形式反向作用于结构上。

式 (12) 所示的微分方程组的求解属于一阶常系数微分方程的边值问题, 本文采用样条函数逼近法进行求解, 具体的求解思路是: 首先使用满足边界条件的 3 次样条插值函数近似表达加劲薄板内剪力流函数, 将微分方程组转化代数方程组进行求解, 再对加劲薄板内剪力流进行积分即可得到各加劲杆轴力沿跨长的分布函数。为提高求解精度, 可以将箱梁沿跨长分为 n 段并采用分段样条函数表达各区段内加劲薄板剪力流的分布。

1.3 剪力滞系数

为定量评价弯曲正应力沿宽箱梁翼缘的不均匀分布情况, 特定义腹板剪力滞系数 λ

$$\lambda = \frac{\sigma_w}{\bar{\sigma}} \quad (18)$$

其中: σ_w 为考虑剪力滞后效应的箱梁截面腹板位置的某一高度处的弯曲正应力; $\bar{\sigma}$ 基于欧拉梁理论计算得到的箱梁相应截面高度处的弯曲正应力; 对于实体有限元数值解而言, $\bar{\sigma}$ 为箱梁截面相应高度位置处弯曲正应力的平均值, 对于比拟杆法而言, $\bar{\sigma}$ 为各加劲杆的平均轴向正应力, 可以采用式 (19) 求解:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum \sigma_i A_i}{\sum A_i} \quad (19)$$

鉴于设计中常以有效翼缘宽度来考虑箱梁翼缘板的剪力滞效应, 按照翼缘有效宽度内的法向应力体积等于原翼缘全宽的法向应力体积的原则^[17], 定义基于比拟杆法的箱梁翼板有效宽度计算公式:

$$b_{m1} = \frac{(y_2 - y_1)(\sigma_1 + \sigma_2) + (y_3 - y_2 - t_w / 2)(\sigma_2 + \sigma_3)}{2\sigma_{1max}} \quad (20)$$

$$b_{m2} = \frac{(y_5 - y_4)(\sigma_5 + \sigma_4) + (y_4 - y_3 - t_w / 2)(\sigma_4 + \sigma_3)}{2\sigma_{2max}} \quad (21)$$

式中: b_{m1} 为悬臂段顶板有效宽度, b_{m2} 为腹板中间段顶板有效宽度, y_i 表示第 i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) 根加劲杆距离箱梁形心的水平距离; $\sigma_i=N_i/A_i$, 为第 i 根加劲杆的轴向应力, σ_{1max} 为图 2 所示箱梁悬臂段 1、2、3 号加劲杆轴向应力中的最大值, σ_{2max} 为图 2 所示箱

梁腹板中间段上 3、4、5 号加劲杆轴向应力中的最大值。

2 数值算例

2.1 比拟杆法分析变截面箱梁剪力滞效应的合理性验证

为检验本文提出的变高度箱梁剪力滞效应的比拟杆分析方法的正确性, 以文献[10]中试验模型为例展开分析, 该试验模型为有机玻璃制作的悬臂箱梁, 跨径 $L=46\text{cm}$, 箱梁梁高沿展向按二次抛物线变化(自由端梁高 $H_a=4\text{cm}$, 嵌固端梁高 $H_b=8\text{cm}$), 靠近悬臂梁自由端有长度为 6cm 的梁体采用等截面, 横截面尺寸及测点位置如图 5 所示, 试验时在靠近腹板的位置处作用对称均布荷载($q=10\text{N/cm}$), 箱体弹性模量 $E=2600\text{MPa}$ 。ANSYS 模型采用 Solid95 单元并划分为六面体映射网格, 计算所加的边界条件和荷载与试验相同。图 7 给出了文献[10]中测试截面(距离嵌固端 3cm)的试验测试值、有限段计算结果以及本文理论解和有限元数值解, 计算结果均对应箱梁顶板中心线高度处的正应力。

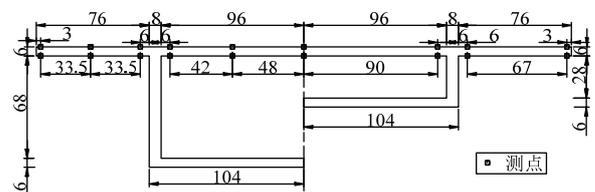


图 5 试验梁横断面 (单位: mm)

Fig.5 Cross section of trial beam (unit: mm)

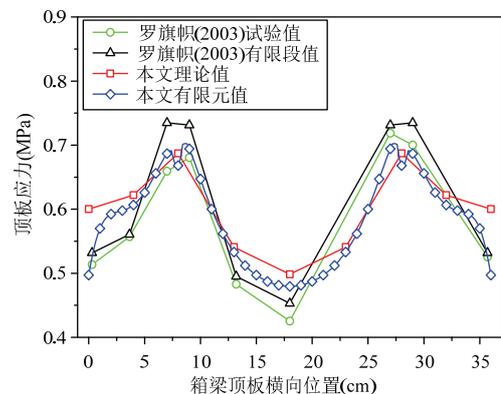


图 6 试验测试截面顶板弯曲正应力对比

Fig.6 Bending normal stress in top flange of test section

从图 6 中可以看出, 在对称均布荷载作用下, 悬臂梁在靠近嵌固端附近截面的顶板弯曲正应力呈现正剪力滞现象且四种计算方法得到的结果吻合良好, 验

证了本文的比拟杆等效面积和计算方法以及 ANSYS 实体有限元计算模型的正确性, 也表明使用实体有限元模型的计算结果校核比拟杆解析结果是可行的。

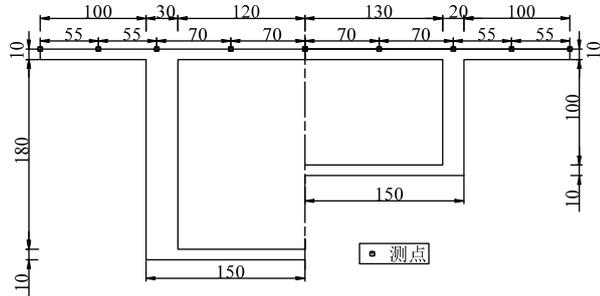


图 7 数值算例横断面图 (单位: cm)

Fig.7 Cross section of numerical example (unit: cm)

2.2 自重作用下悬臂梁的剪力滞效应

在实际工程中, 箱梁梁高和腹板沿桥跨方向均会发生变化, 且自重作为结构的主要荷载形式, 研究变截面箱梁在自重作用下的剪力滞效应对实际工程更有指导意义。为此, 参考变截面悬臂箱梁桥常用的构造尺寸, 设计一座跨径 $L=15\text{m}$ 的悬臂梁桥, 箱梁梁高沿展向按二次抛物线变化(自由端梁高 $H_a=1.2\text{m}$, 嵌固端梁高 $H_b=2.0\text{m}$), 腹板厚度则由嵌固端处 0.3m 线性减小至自由端处 0.2m , 横截面尺寸及测点位置如图 7 所示, 梁体材料选用 C50 混凝土, 弹性模量 $E=3450\text{MPa}$, ANSYS 有限元模型中采用 Solid95 单元并划分为六面体映射网格, 悬臂梁嵌固端的边界条件使用节点全约束进行模拟。

图 8 给出了自重作用下悬臂梁沿纵向不同位置处(悬臂梁根部截面、距离悬臂梁根部 1m 处截面、 $3/4$ 截面、 $1/2$ 截面、 $1/4$ 截面)顶板顶缘的弯曲正应力分布, 从图中可以看出本文比拟杆解析解与实体有限元数值解在 $1/4$ 截面、 $1/2$ 截面、 $3/4$ 截面以及距离根部 1m 处截面吻合良好, 这表明本文比拟杆算法在计算梁高和腹板厚度沿跨向变化的悬臂箱梁顶板剪力滞效应的可靠性; 悬臂梁根部截面处有限元计算结果和比拟杆解析解差异较为明显, 这可能是由于有限元模型的根部截面处存在明显的应力集中现象, 致使截面顶板顶缘的整体应力水平偏高; 嵌固端至 $1/2$ 截面区段内箱梁顶板正应力分布呈现正剪力滞现象, 而在 $1/2$ 截面至悬臂自由端区段内出现顶板正应力分布呈现负剪力滞现象。翼缘板内水平剪切应力不均匀分布和作用方向的变化是箱梁剪力滞现象出现的根本原因, 因此为进一步探究其原因, 图 9 给出了加劲杆 1、2 之间的剪力流 q_{21} 沿

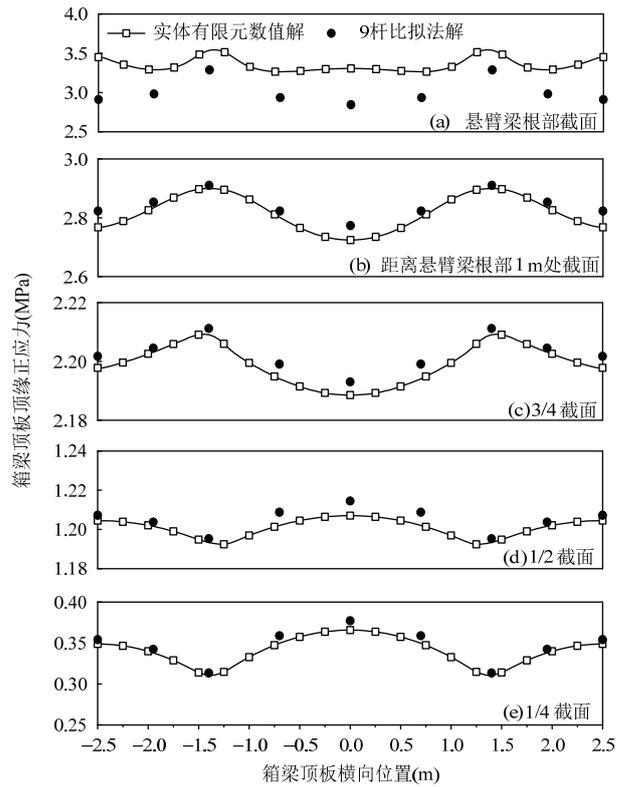


图 8 数值算例不同位置处顶板顶缘应力分布对比

Fig.8 Bending normal stress in top flange of numerical example

跨向分布, 从中可以发现: 从悬臂自由端向嵌固端靠近时 q_{21} 呈现出先增大后减小的规律, 正是这个变化促成了悬臂箱梁顶板弯曲正应力由负剪力滞向正剪力滞的转变; 另外, 越靠近嵌固端实体有限元和比拟杆解析解差异越发显著, 且实体有限元分析得到的 q_{21} 在嵌固端附近出现突变, 这可能是由于有限元模型中嵌固端的固定约束所产生的应力集中导致的, 这也能解释悬臂梁嵌固端截面顶板弯曲应力的有限元数值解与比拟杆解析解存在较大差异的原因。

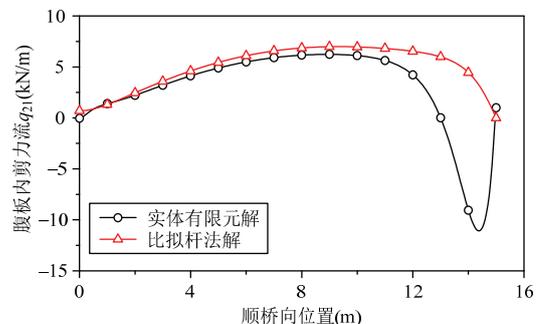


图 9 加劲杆 1、2 之间的剪力流 q_{21} 沿跨向分布

Fig.9 Shear flow distribution of beam Bar 1 and Bar 2 q_{21} along span direction

2.3 箱梁梁高和腹板厚度变化对剪力滞系数的影响

为进一步探究箱梁梁高和腹板厚度变化对剪力滞系数的影响,以上述变截面悬臂梁算例为蓝本,通过改变梁高变化规律(将沿展向二次抛物线变化的梁高调整为沿展向线性变化、高度 1.2m 的等高腹板变厚度截面、高度 2.0m 的等高腹板变厚度截面三种工况)、箱梁腹板厚度的变化规律(将由自由端 0.2m 线性变化至嵌固端 0.3m 的腹板构造调整为腹板等厚度的构造),通过对比不同工况下悬臂梁剪力滞系数沿展向的变化探究箱梁梁高和腹板厚度变化对剪力滞系数的影响。

图 10、图 11 分别给出了梁高和腹板厚度变化时悬臂梁从距自由端 3m 处至嵌固端的各截面的剪力滞系数的变化规律。从图中可知,各种构造形式下悬臂梁靠近自由端的位置处呈现负剪力滞现象,靠近嵌固端位置处呈现正剪力滞现象,且越靠近自由端负剪力滞效应越明显,越靠近嵌固端正剪力滞效应也越明显;箱梁梁高和腹板厚度的变化会减小顶板弯曲应力的剪力滞效应,但腹板厚度的影响程度相对较弱;箱梁截面梁高的变化将导致正负剪力

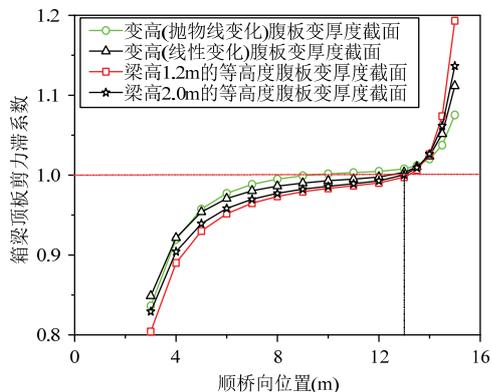


图 10 梁高变化对顶板顶缘剪力滞系数的影响

Fig.10 Effect of girder height on shear lag coefficient

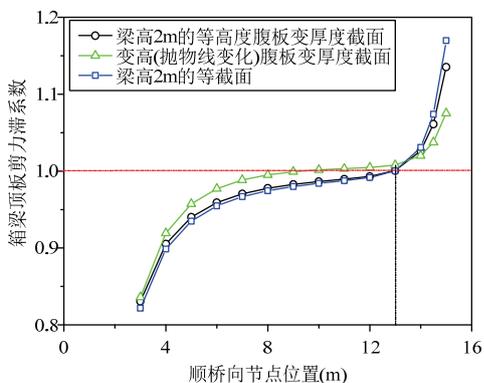


图 11 腹板厚度变化对顶板顶缘剪力滞系数的影响

Fig.11 Effect of web thickness on shear lag coefficient

滞的交界位置发生变化,具体而言,变高度悬臂箱梁的正剪力滞区段长度明显大于等高度箱梁,且梁高二次抛物线变化时悬臂梁正剪力滞区段也略大于梁高线性变化的箱梁,但腹板厚度的变化不会显著影响正负剪力滞的交界位置。

为进一步解释上述现象,图 12、图 13 分别给出了不同构造形式下箱梁腹板剪力流 q_E 和加劲杆 1、2 之间水平剪力流 q_{21} 沿桥跨方向的变化情况,从中可以看出:梁高从自由端向嵌固端逐渐增大的构造能显著降低箱梁腹板内剪应力水平,虽然顺桥向相同位置处变高度悬臂箱梁(最小截面高 1.2m)的剪力要大于梁高 1.2m 的等高悬臂箱梁,但腹板内剪力流却明显小于梁高 1.2m 的等高悬臂箱梁,这正是变高度箱梁剪力滞效应小于等高度箱梁最本质的原因;相同条件下宽高比大的箱梁顶板内水平剪力流更大,且靠近嵌固端处顶板内水平剪力流 q_{21} 下降更快,这也解释了梁高 1.2m 的等高箱梁剪力

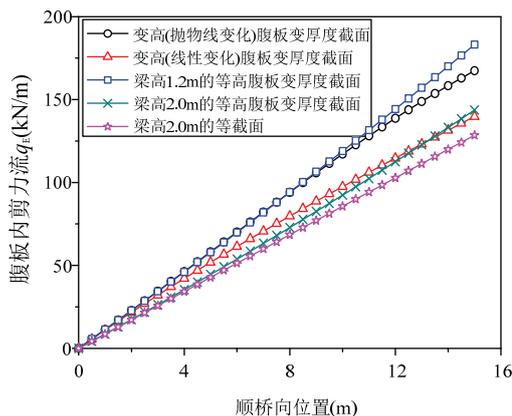


图 12 不同构造形式下箱梁腹板内剪力流 q_E 沿跨长分布

Fig.12 Shear flow distribution in web q_E along span direction of box girder with different structure

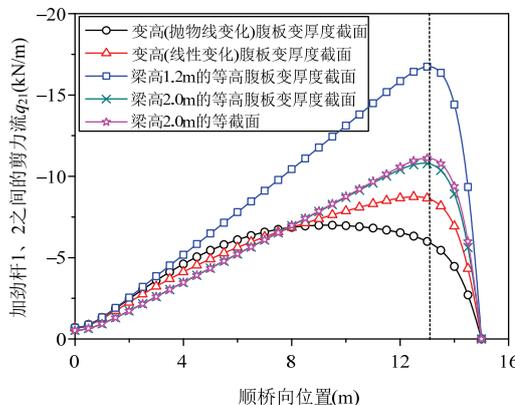


图 13 不同构造形式下顶板内剪力 q_{21} 沿跨长分布

Fig.13 Shear flow distribution in top plate q_{21} along span direction of box girder with different structure

滞效应在所有工况中最为显著的原因；相对于梁高线性变化而言，梁高抛物线变化时顶板内水平剪力流 q_{21} 更小，因此抛物线变化的悬臂箱梁剪力滞效应要弱于梁高线性变化的悬臂箱梁；从悬臂自由端向嵌固端靠近时顶板内水平剪力流 q_{21} 呈现出先增大后减小的规律，且曲线拐点正好是箱梁正、负剪力滞的交界位置，这说明正是顶板内部水平剪力流的变化导致了悬臂箱梁正、负剪力滞现象，而当梁高抛物线变化时， q_{21} 先增后减的曲线拐点更靠近悬臂自由端，因此变高度悬臂箱梁的正剪力滞区段长度明显大于等高箱梁。

2.4 悬臂梁正剪力滞区段长度

相对于等截面悬臂箱梁而言，考虑截面变化后悬臂梁正剪力滞区长度有所增大，为进一步定量考察变截面箱梁的正剪力滞区长度，以图 7 所示算例为蓝本，保持截面宽度、腹板厚度和悬臂端梁高不变，设置悬臂梁跨径从 5.0m 变化到 70.0m (步长间隔 10.0m)，嵌固端梁高从 2.0m 变化 6.0m (步长间隔 1.0m)，并假定梁高服从抛物线变化，基于本文比拟杆法计算不同工况下梁体正剪力滞区长度 L_{ps} (使用悬臂梁跨度 L 对其无量纲化)，将相同跨径下不同梁高的正剪力滞区长度作为一组变量绘制箱形图 (如图 14 和图 15)，作为对比还给出了等截面悬臂箱梁的相应结果。

从中可以发现：在截面宽度不变的前提下，等截面悬臂梁正剪力滞区无量纲长度随跨径增大而减小，而变截面梁正剪力滞区长度受悬臂梁跨径影响较小，且变截面悬臂梁正剪力滞区长度受梁高影响更敏感；箱梁截面高度变化后梁体正剪力滞区无量纲长度由等截面的 0.27 增至 0.6 (增加约 1 倍)，但最大正剪力滞系数明显减小 (减小幅度近 20%)。

为更为直观地呈现变截面悬臂箱梁翼板有效宽

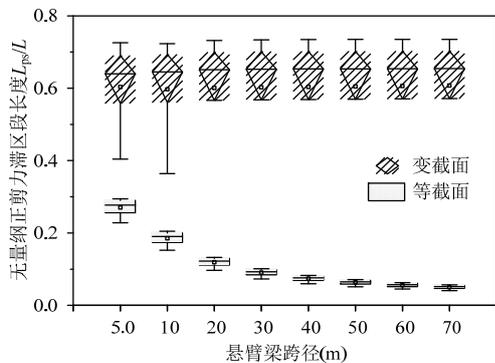


图 14 悬臂箱梁正剪力滞区无量纲长度

Fig.14 The non-dimensional length of positive shear lag effect in cantilever box girder

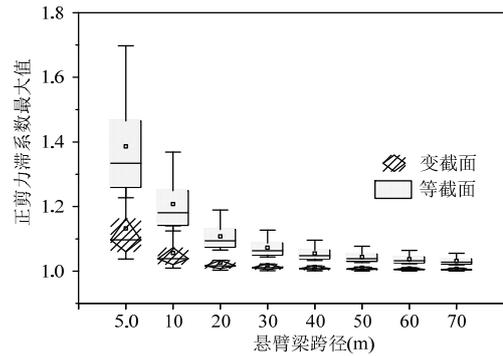


图 15 悬臂箱梁剪力滞系数最大值

Fig.15 The maximum shear lag coefficient in cantilever box girder

度沿跨径方向的分布，以跨径 15m 的变高 (二次抛物线变化) 腹板变厚度悬臂梁为例，图 16 给出了本文方法和规范 JTG 3362—2018 中翼板有效宽度的对比。

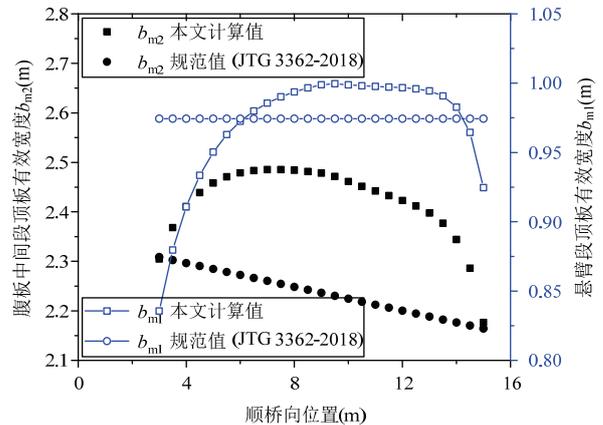


图 16 悬臂箱梁顶板有效分布宽度对比

Fig.16 The effective distribution width of top flange of cantilever box girder

从中可以发现：总体来看，采用本文算法得到的变截面悬臂梁顶板有效宽度在桥跨大部分区域内均大于规范 JTG 3362—2018 的相关规定，表明规范 JTG 3362—2018 能够较好地考虑变截面悬臂梁的剪力滞效应；但悬臂梁梁端 (自由端和嵌固端) 位置处顶板悬臂段有效宽度计算值小于规范 JTG 3362—2018 相关规定，而且悬臂梁自由端附近的箱梁呈现负剪力滞效应，这必然导致悬臂自由端处箱梁顶板悬臂段设计效应值偏小，设计时应该予以关注。

3 结论

在传统比拟杆法的基础上，通过推导变截面箱梁加劲杆等效面积和剪力滞效应比拟杆控制方程，

提出了适用于变截面箱梁剪力滞效应分析的方法，并以悬臂箱梁模型为算例，验证了本文计算方法的正确性，通过参数分析发现：

(1) 箱梁梁高和腹板厚度的变化会减小箱梁截面的剪力滞效应，但腹板厚度的影响程度相对较弱，梁高从自由端向嵌固端逐渐增大的构造能显著降低箱梁腹板内剪应力水平，这正是变高度箱梁剪力滞效应小于等高度箱梁最本质的原因。

(2) 箱梁顶板内水平剪力流沿跨长先增大后减小的变化导致了悬臂箱梁正、负剪力滞现象，同等跨径下变高度悬臂箱梁的正剪力滞区段长度可能是等高箱梁的 2 倍，但变高度箱梁的最大剪力滞系数会有明显减小。

(3) 工程设计中可以通过调整箱梁梁高和腹板厚度沿顺桥向的变化趋势，尽量让箱梁腹板剪力流水平沿桥跨方向保持不变，避免腹板剪力流水平变化过快，以最大程度地减小箱梁剪力滞效应。

参 考 文 献

[1] Li Z, Nie J G, Ji W Y. Positive and negative shear lag behaviors of composite twin-girder decks with varying cross-section [J]. Science China Technological Sciences, 2017, 60(1): 116-132

[2] 蔺鹏臻, 刘凤奎, 冀伟, 等. 变分原理分析混凝土箱梁的剪力滞效应[J]. 铁道学报, 2013, 35(2): 93-98 (Lin Pengzhen, Liu Fengkui, Ji Wei, et al. Analysis on shear lag effect of concrete box beam by variation principle [J]. Journal of the China Railway Society, 2013, 35(2): 93-98 (in Chinese))

[3] Zhou S J. Finite beam element considering shear-lag effect in box girder[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2010, 136(9): 1115-1122

[4] 张慧, 张玉元, 张元海, 等. 单箱双室简支箱梁剪切变形及剪力滞双重效应分析[J].应用数学和力学, 2016, 37(8): 791-803 (Zhang Hui, Zhang Yuyuan, Zhang Yuanhai, et al. Analysis on shear deformation and shear-lag effects on twin-cell box girders [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2016, 37(8): 791-803 (in Chinese))

[5] Li Zhu, Su R K L. Analytical solutions for composite beams with slip, shear-lag and time-dependent effects[J]. Engineering Structures, 2017, 152: 559-578

[6] 肖军, 李小珍, 刘德军, 等. 一种剪滞翘曲位移函数的解析构造法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2017, 49(3): 162-167 (Xiao Jun, Li Xiaozhen, Liu Dejun, et al. An analytical construction method of wrapping displacement function of shear lag[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2017, 49(3): 162-167 (in Chinese))

[7] Luo Q Z, Wu Y M, Li Q S, et al. A finite segment model for shear lag analysis[J]. Engineering Structures, 2004, 26(14): 2113-2124

[8] Cambronero-Barrientos F, Díaz-Del-Valle J, Martínez-Martínez J A. Beam element for thin-walled beams with torsion, distortion, and shear lag[J]. Engineering Structures, 2017, 143: 571-588

[9] 马驰, 刘世忠, 伍明强. 考虑剪切剪滞双重效应波形钢腹板组合箱梁的矩阵分析[J]. 中国公路学报, 2018, 31(3): 80-88 (Ma Chi, Liu Shizhong, Wu Mingqiang. Matrix analysis of composite box girder with corrugated steel webs considering shear deformation and shear lag effect[J]. China Journal of Highway and Transport, 2018, 31(3): 80-88 (in Chinese))

[10] 罗旗帜, 吴幼明, 刘光栋. 变高度薄壁箱梁的剪力滞[J]. 铁道学报, 2003, 25(5): 81-87 (Luo Qizhi, Wu Youming, Liu Guangdong. Shear lag of the thin-wall box girder with varying depths[J]. Journal of the China Railway Society, 2003, 25(5): 81-87 (in Chinese))

[11] 张元海, 王来林, 李乔. 箱形梁剪滞效应分析的一维有限元法及其应用[J]. 土木工程学报, 2010, 43(8): 44-50 (Zhang Yuanhai, Wang Lailin, Li Qiao. One-dimensional finite element method and its application for the analysis of shear lag effect in box girders[J]. China Civil Engineering Journal, 2010, 43(8): 44-50 (in Chinese))

[12] 韦成龙, 李斌, 曾庆元. 变截面连续箱梁桥剪力滞及剪切变形双重效应分析的传递矩阵法[J]. 工程力学, 2008, 25(9): 111-117 (Wei Chenglong, Li Bin, Zeng Qingyuan. Transfer matrix method considering both shear lag and shear deformation effects in non-uniform continuous box girder[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(9): 111-117 (in Chinese))

[13] 程祥云. 梁桥理论与计算[M]. 北京: 人民交通出版社, 1990

[14] 赵志峰, 蔺鹏臻, 方炜彬. 比拟杆法分析研究单箱三室箱梁剪力滞效应[J]. 铁道科学与工程学报, 2016, 13(4): 697-704 (Zhao Zhifeng, Lin Pengzhen, Fang Weibin. The bar simulation method for shear lag effect of three-cell box girders [J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2016, 13(4): 697-704 (in Chinese))

[15] 张士铎. 常截面悬臂箱梁跨间作用集中力和集中弯矩时负剪力滞效应的分析[J]. 宁波大学学报, 1991, 4(2): 50-60

[16] 张元海, 李乔. 变截面梁的应力计算及其分布规律研究[J]. 工程力学, 2007, 24(3): 78-82 (Zhang Yuanhai, Li Qiao. Stress calculation and stress distribution analysis of non-uniform beams[J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(3): 78-82 (in Chinese))

[17]. JTG 3362—2018 公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范[S]. 北京: 人民交通出版社, 2018 (JTG 3362—2018 Code for design of highway reinforced and prestressed concrete bridges and culverts[S]. Beijing: China Communications Press, 2018 (in Chinese))

郭增伟(1985—), 男, 博士, 副教授。主要从事桥梁振动及控制、长期性能方面研究。
 李龙景(1990—), 男, 硕士研究生。主要从事钢筋混凝土结构设计理论方面研究。
 张俊波(1978—), 男, 博士, 讲师。主要从事数值模拟与分析研究。