

《泛函分析》考试大纲

卷面满分为 100 分，考试时间为 100 分钟。

一、适用范围

适用于数学专业博士生入学考试

二、内容及要求

1、线性赋范空间

- (1) 度量空间和不动点原理
- (2) 线性赋范空间和一些经典例子
- (3) 完备性和 Banach 空间

要求：

了解度量空间、线性赋范空间、完备性和 Banach 空间的定义，掌握不动点定理、经典赋范空间中的三角不等式 (Minkowski 不等式) 以及完备性的证明。

2、有界线性算子

- (1) 空间 $B(X, Y)$
- (2) 共鸣定理及其应用
- (3) 开映射定理、逆算子定理和闭图像定理
- (4) Hahn-Banach 延拓定理及其推论

要求：

有界线性算子、空间 $B(X, Y)$ 的定义；空间 $B(X, Y)$ 在何种条件下成为 Banach 空间；有界线性算子的范数计算；掌握共鸣定理及其相关应用、逆算子定理、闭图像定理、Hahn-Banach 延拓定理及其推论。

3、连续线性泛函

(1) 对偶空间 X^*

(2) 弱收敛和弱星收敛 (w 收敛和 w^* 收敛)

要求:

连续线性泛函、对偶空间 X^* 的定义; 连续线性泛函的范数计算; c_0 、 l_p 、 $C[a,b]$ 等空间的对偶; 自然嵌入算子; 依范数收敛、弱收敛和弱星收敛的定义, 以及这三种收敛的关系。

4、Hilbert 空间

(1) 内积空间和 Hilbert 空间

(2) 正交投影

(3) Riesz 表示定理

要求:

内积、内积空间、Hilbert 空间、投影的定义; 内积运算的相关性质 (勾股定理、平行四边形法则、极化恒等式等); Cauchy-Schwartz 不等式; 投影定理; 投影的等价刻画; Riesz 表示定理

5、谱理论

要求:

谱点的定义和分类; 自伴算子、酉算子、左移算子的谱点集。

三、参考书目

1. 《泛函分析基础》, 科学出版社, 刘培德编著
2. 《泛函分析讲义》, 高等教育出版社, 许全华等编著