



暨南大学
JINAN UNIVERSITY

2019年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题（A卷）

学科、专业名称：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、统计学

研究方向：各方向

考试科目名称：709数学分析

考生注意：所有答案必须写在答题纸（卷）上，写在本试题上一律不给分。

一、计算题（共3小题，每小题8分，共24分）

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x \tan x^2}{(e^{3x} - 1)(\sqrt{1 + x^2} - 1)}$.

2. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(1 + x)}{\sin^2 x}$.

3. 求积分 $\int x \arctan x dx$.

二、计算题（共6小题，每小题9分，共54分）

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的收敛域及和函数。

2. 把 $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0] \\ 1, & x \in (0, \pi) \end{cases}$ 展开成傅里叶级数，并讨论该级数的收敛性。

3. 求 $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ ，其中 D 是由 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ 所围区域。

4. 求积分 $\int_{-1}^1 \frac{1 + \sin x + x \ln(2 + x^4)}{(1 + x^2)^2} dx$.

5. 求由方程 $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的驻点，并判断求得的驻点是否极值点，若为极值点，说明是极大还是极小值点，并求对应极值。

6. 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$ ($b > a > 0$).

三、讨论分析题（共4小题，共36分）

1. (8分) 讨论函数 $f(x) = |x^3|$ 在 $x = 0$ 处各阶导数的存在性，并求 $dy|_{x=-1}$, $d^2y|_{x=1}$ 。

2. (8分) 判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{n+1}$ 是绝对收敛、条件收敛还是发散的。

3. (8分) 讨论反常积分 $\Phi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$ 的收敛性。

4. (12分) 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点(0,0)的累次极限、连续性、偏导数及可微性。

四、证明题 (共4小题, 每小题9分, 共36分)

1. 设 $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2, n = 1, 2, \dots$ 。证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在, 并求其值。

2. 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛, 但在内闭一致收敛。

3. 验证表达式 $(3x^2 - yz)dx + (3y^2 - xz)dy + (3z^2 - xy)dz$ 为全微分, 并求其原函数。

4. 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在。证明: f 在 $[a, +\infty)$ 上有界。又问 f 在 $[a, +\infty)$ 上必有最大值或最小值吗? 给出证明或者反例。

题目结束