

# 人群跳跃荷载的互功率谱模型

熊杰程 陈 隽

(同济大学, 上海 200092)

**摘要:** 将人群跳跃荷载视为联合平稳随机过程, 提出相干函数并结合已有的自功率模型, 构建跳跃频率一致和不一致两种典型情况下的互功率谱模型。利用三维动作捕捉技术克服了人群跳跃荷载试验中同步测试的难题, 并验证结果与测力板方法的一致性。由试验数据获得人群跳跃频率的分布和相干函数参数的取值。利用所提出的互功率谱模型, 由随机振动理论计算结构加速度响应的自功率谱和均方根值。理论预测结果与已建大跨楼盖的实测响应结果对比表明, 所建议的互功率谱模型和计算方法合理, 可用于人群跳跃荷载作用下结构响应的计算与分析。

**关键词:** 人群跳跃荷载; 互功率谱; 人致激励; 振动舒适度; 随机振动

**中图分类号:** TU312+ **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-131X(2019)10-0083-10

## Cross-power spectral density modelling for crowd jumping loads

Xiong Jiecheng Chen Jun

(Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Crowd jumping loads are regarded as the joint stationary stochastic process. With the proposed coherence function and the previous auto-power spectral density (PSD) model for individual jumping load, two cross-PSD models are respectively established for the case that the jumping persons have same and the case with different jumping frequency. The synchronous problem in crowd jumping experiment can be overcome by the 3D motion capture technology. The results were verified to be consistent with those by the force plate method. The distribution of the jumping frequency and the values of the coherence function parameters are obtained from the experimental data. Using the cross-PSD model, the auto-PSD and the root mean square value of the structural acceleration response are calculated by the stochastic vibration theory. The theoretical prediction results agree well with the measured results of the large-span floor, which demonstrates that the proposed cross-PSD model and the calculation method are reasonable and can be used to analyze the structural response induced by the crowd jump loads.

**Keywords:** crowd jumping load; cross-power spectral density; human-induced vibrations; vibration serviceability; stochastic vibration

**E-mail:** cejchen@tongji.edu.cn

## 引 言

对于大跨楼板、人行桥和悬臂看台等轻柔结构, 人群活动可能会引起振动舒适度问题和安全问题<sup>[1]</sup>。

与步行、bounce 等其他入致荷载相比, 跳跃荷载对结构产生的作用力最大<sup>[2]</sup>。同时在体育比赛和音乐会中, 人群跳跃容易受音乐引导而趋于同步, 导致严重后果。例如, 1994 年的伦敦体育看台事件<sup>[3]</sup>、2011 年的首尔健身房事件<sup>[4]</sup>以及 2018 年世界杯期间的小型地震事件<sup>[5]</sup>。

人群跳跃荷载模型是准确评估人致结构振动问题的前提, 关键难题是如何体现人群中单人与单人之间的协同性, 也是目前国内外学者研究的重点。然而, 由于缺乏针对人群跳跃荷载好的试验手段, 现有模型

基金项目: 国家自然科学基金 (51778465)、土木工程防灾国家重点实验室自主课题 (SLDRCE14-B-16)

作者简介: 熊杰程, 博士研究生

通讯作者: 陈隽, 博士, 教授

收稿日期: 2018-12-14

或由结构响应反算人群跳跃荷载<sup>[6]</sup>，或基于单人跳跃荷载试验<sup>[7-10]</sup>，均缺少人群实测数据的支撑和验证。同时，多点激励荷载建模复杂，除 Sim 等<sup>[7]</sup>给出了人群跳跃荷载的多点激励模型，现有模型一般采用等效人群折减系数的方式，配合单人跳跃荷载模型使用<sup>[6,8-11]</sup>。这类单点激励的模型虽然计算简单，但不能细致地考虑人群分布与站位的影响。总体上，人群跳跃荷载模型研究亟待试验技术和建模方式上的突破。

建筑楼板上的人群跳跃荷载，与长线性（或多支撑）结构上的多点地震动激励类似，都具有时空变化特征。对于多点地震动，Vanmarcke<sup>[12]</sup>建议采用均匀随机场模型，并主要考虑地震动的行波效应、纯相干效应和场地效应。此后，Harichandran 和 Vanmarcke<sup>[13]</sup>通过引入时间滞后参数来考虑行波效应，并利用对齐的地震动记录考虑纯相干效应。Der Kiureghian 和 Neuenhofer<sup>[14]</sup>通过假定不同场地具有不同的自功率谱来考虑局部场地效应。受上述工作的启发，本文提出建立人群跳跃荷载互功率谱模型。同时，引入三维动作捕捉技术解决人群跳跃荷载试验手段问题，为模型参数的确定提供数据基础。

### 1 人群跳跃荷载的互功率谱模型

#### 1.1 人群跳跃下结构的动力响应

人致结构振动评估通常基于结构加速度响应，与结构静位移无关，因此随后推导中均忽略跳跃人群的静体重。假设在某楼板结构上有  $n_p$  个人跳跃，如图 1 所示，利用振型分解法可以得到结构每一阶的运动方程：

$$m_l \ddot{q}_l + 2\xi_l \omega_l m_l \dot{q}_l + \omega_l^2 m_l q_l = \sum_{\alpha=1}^{n_p} \phi_{l,\alpha} w_\alpha x_\alpha(t) \quad (1)$$

( $l=1,2,\dots,n_v$ )

式中： $m_l$ 、 $\xi_l$ 、 $\omega_l$  和  $q_l$  分别为结构第  $l$  阶的模态质量、阻尼比、角频率和振型坐标； $\phi_{l,\alpha}$ 、 $w_\alpha$  和  $x_\alpha(t)$

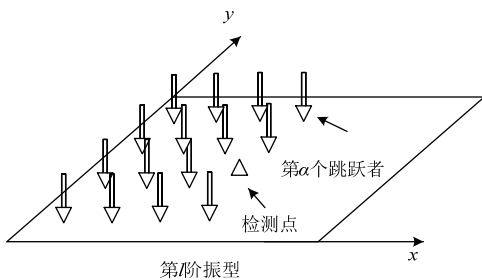


图 1 人群在结构上跳跃

Fig.1 A floor structure subjected to crowd jumping

分别为第  $\alpha$  个跳跃者跳跃点处结构的第  $l$  阶振型值、体重和重力加速度归一化的质心加速度； $n_v$  为结构响应计算时需要考虑的振型数。

结构上某一检测点的加速度响应为：

$$a(t) = \sum_{l=1}^{n_v} \phi_l \ddot{q}_l(t) \quad (2)$$

式中： $\phi_l$  为该检测点在结构第  $l$  阶的振型值。

假定  $n_p$  个人的跳跃荷载是联合平稳随机过程  $\{X_1(t), X_2(t) \dots X_{n_p}(t)\}$ ，且  $\{x_1(t), x_2(t) \dots x_{n_p}(t)\}$  是该随机过程的样本，则检测点的加速度时程  $a(t)$  的平稳阶段也可看作平稳随机过程  $A(t)$  的样本。由随机振动理论， $A(t)$  的自功率谱  $G_A(f)$  为：

$$G_A(f) = \sum_{l=1}^{n_v} \sum_{k=1}^{n_v} \sum_{\alpha=1}^{n_p} \sum_{\beta=1}^{n_p} \phi_l \phi_k \phi_{l,\alpha} \phi_{k,\beta} h_l(f) h_k^*(f) w_\alpha w_\beta G_{\alpha\beta}(f) \quad (3)$$

式中： $h_l(f)$  为结构第  $l$  阶振动的加速度频响函数，如式(4)所示； $h_k^*(f)$  为  $h_k(f)$  的共轭复数； $G_{\alpha\beta}(f)$  为  $X_\alpha(t)$  和  $X_\beta(t)$  的互功率谱，当  $\alpha$  和  $\beta$  相等时，表示单人跳跃荷载的自功率谱。

$$h_l(f) = \frac{-f^2}{m_l(-f^2 + f_l^2 + 2\xi_l i f f_l)} \quad (4)$$

对  $G_A(f)$  在整个频域范围内积分，可以得到  $A(t)$  的均方根值  $a_{\text{rms}}$ ：

$$a_{\text{rms}} = \sqrt{\int_0^\infty G_A(f) df} \quad (5)$$

对于某一给定结构，式(3)中除了  $G_{\alpha\beta}(f)$  都取决于结构的模态性质、跳跃者的体重和其在结构上的位置。因此，重点是完成对  $G_{\alpha\beta}(f)$  的建模。

#### 1.2 相干函数和互功率谱

假定人群跳跃荷载是均匀随机场，其任意两个点的互功率谱  $G_{\alpha\beta}(f, \mathbf{v})$  只与它们的空间间隔  $\mathbf{v}$  有关。其中， $\alpha$  和  $\beta$  表示空间上 2 个不同的点，即对应于跳跃人群中两个不同的跳跃者。如果  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ，即 2 个点重合时：

$$G_{\alpha\beta}(f, \mathbf{0}) = G_{\alpha\alpha}(f) = G_{\beta\beta}(f) \quad (6)$$

式中： $G_{\alpha\alpha}(f)$  和  $G_{\beta\beta}(f)$  分别为第  $\alpha$  个人和第  $\beta$  个人的自功率谱。

该随机场的相干函数由互功率谱和自功率谱获得：

$$\gamma_{\alpha\beta}(f, \mathbf{v}) = \frac{G_{\alpha\beta}(f, \mathbf{v})}{G_{\alpha\alpha}(f)} \quad (7)$$

它的模  $|\gamma_{\alpha\beta}(f, \nu)|$  和相位  $\varphi_{\alpha\beta}(f, \nu)$  由下式获得：

$$|\gamma_{\alpha\beta}(f, \nu)|^2 = \left( \frac{\text{Re}[G_{\alpha\beta}(f, \nu)]}{G_{\alpha\alpha}(f)} \right)^2 + \left( \frac{\text{Im}[G_{\alpha\beta}(f, \nu)]}{G_{\alpha\alpha}(f)} \right)^2 \quad (8)$$

$$\varphi_{\alpha\beta}(f, \nu) = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}[G_{\alpha\beta}(f, \nu)]}{\text{Re}[G_{\alpha\beta}(f, \nu)]} \right) \quad (9)$$

式中：Im [] 和 Re [] 分别表示虚部和实部。

### 1.3 自功率谱模型

实测数据表明，单人跳跃荷载的能量主要集中在其跳跃主频和倍频处，其他地方能量几乎为零。据此，在作者之前的研究中，将自功率谱按照跳跃荷载阶数进行建模并考虑前 3 阶的能量<sup>[15]</sup>：

$$G_{\alpha\alpha}(f) = \sum_{j=1}^3 G_{\alpha\alpha,j}(f) \quad (10)$$

式中： $G_{\alpha\alpha,j}(f)$  为  $G_{\alpha\alpha}(f)$  的第  $j$  阶表达式，具体见文献[15]。

### 1.4 互功率谱模型

#### 1.4.1 互功率谱的分类

人群跟随节拍器或音乐进行跳跃时，并不是所有跳跃者都可以跟上节奏。考虑此实际情况，将人群中任意两人间的互功率谱  $G_{\alpha\beta}(f)$  分为两类：第一类是两个人的跳跃频率相同，即  $F_{\text{jump},\alpha} = F_{\text{jump},\beta}$ ， $F_{\text{jump},\alpha}$  代表第  $\alpha$  个人的跳跃频率；第二类是两个人的跳跃频率不同，即  $F_{\text{jump},\alpha} \neq F_{\text{jump},\beta}$ ，

#### 1.4.2 第一类互功率谱

由文献[15]可知，此时，两人的自功率谱相同，即  $G_{\alpha\alpha}(f) = G_{\beta\beta}(f)$ 。由式(7)可知，只需完成对相干函数  $\gamma_{\alpha\beta}(f, \nu)$  的建模，就可以得到任意两人的互功率谱  $G_{\alpha\beta}(f, \nu)$ 。在地震动建模中，相干函数的幅值和相位通常用来表示任意两个场地间的纯相干效应和行波效应。对人群跳跃， $\gamma_{\alpha\beta}(f, \nu)$  取决于任意两人对外界节拍或音乐的反应。这主要取决于其个人特点，而不是其所在位置。因此，假定  $\gamma_{\alpha\beta}(f, \nu)$  可以简化为  $\gamma_{\alpha\beta}(f)$ 。

因为两人的  $G_{\alpha\alpha}(f)$  和  $G_{\beta\beta}(f)$  相等，所以假定两个人的互功率谱的实部  $\text{Re}[G_{\alpha\beta}(f)]$  和虚部  $\text{Im}[G_{\alpha\beta}(f)]$  与  $G_{\alpha\alpha}(f)$  有着相同的形状。由式(10)可知，自功率谱是按照其阶数展开。因此，相干函数幅值  $|\gamma_{\alpha\beta}(f)|$  也可以按照其阶数展开，由式(8)知：

$$\begin{aligned} |\gamma_{\alpha\beta}(f)|^2 &= \left( \frac{\text{Re}[G_{\alpha\beta}(f)]}{G_{\alpha\alpha}(f)} \right)^2 + \left( \frac{\text{Im}[G_{\alpha\beta}(f)]}{G_{\alpha\alpha}(f)} \right)^2 \\ &\approx \left( \frac{\sum_j \text{Re}[G_{\alpha\beta,j}(f)]}{\sum_j G_{\alpha\alpha,j}(f)} \right)^2 + \left( \frac{\sum_j \text{Im}[G_{\alpha\beta,j}(f)]}{\sum_j G_{\alpha\alpha,j}(f)} \right)^2 \\ &\approx \left( \frac{\int \text{Re}[G_{\alpha\beta,j}(f)]df}{\int G_{\alpha\alpha,j}(f)df} \right)^2 + \left( \frac{\int \text{Im}[G_{\alpha\beta,j}(f)]df}{\int G_{\alpha\alpha,j}(f)df} \right)^2 \\ &= R_{\alpha\beta}^2(j) + V_{\alpha\beta}^2(j) = |\gamma_{\alpha\beta}(j)|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

式中： $G_{\alpha\beta,j}(f)$  为第  $j$  阶  $G_{\alpha\beta}(f)$ ； $R_{\alpha\beta}(j)$  为  $\text{Re}[G_{\alpha\beta,j}(f)]$  和  $G_{\alpha\alpha,j}(f)$  的面积比； $V_{\alpha\beta}(j)$  为  $\text{Im}[G_{\alpha\beta,j}(f)]$  和  $G_{\alpha\alpha,j}(f)$  的面积比。

由于跳跃荷载的能量主要集中在其主频处，因此当  $F_{\text{jump},\alpha} = F_{\text{jump},\beta}$  时，两个人的相位谱  $\varphi_{\alpha\beta}(f)$  取决于两个人的时间差  $\Delta T_{\alpha\beta}$ ：

$$\varphi_{\alpha\beta}(f) = 2\pi f \Delta T_{\alpha\beta} \quad (12)$$

而且该时间差满足闭合性：

$$\Delta T_{\alpha\beta} = \Delta T_{\alpha\theta} + \Delta T_{\theta\beta} \quad (13)$$

式中：下标  $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\theta$  为跳跃者的编号，即任意 3 个跳跃者。因此，当跳跃人数为  $n_p$  时，只需  $n_p - 1$  个独立的时间滞后就可以表示任意两个人的时间差。首先任意选取某时刻作为时间参考点，每一个跳跃者的关于时间参考点的时间差作为其时间滞后，当获得所有人的时间滞后 ( $\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_{n_p}$ ) 后，任意两个人时间差  $\Delta T_{\alpha\beta}$  可由下式获得：

$$\Delta T_{\alpha\beta} = \Delta T_{\beta} - \Delta T_{\alpha} \quad (14)$$

注意到：虽然有  $n_p$  个时间滞后，但由于时间参考点可以任意选取，所以只有  $n_p - 1$  个独立的时间滞后。例如，可以选取时间参考点使  $\Delta T_1 = 0$ 。

根据式(11)到(14)，任意两个跳跃者的互功率谱可由下式获得：

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(f, \nu) &\approx G_{\alpha\beta}(f) \\ &\approx \left[ \sum_j |\gamma_{\alpha\beta}(j)| G_{\alpha\alpha,j}(f) \right] \exp[i2\pi f(\Delta T_{\beta} - \Delta T_{\alpha})] \end{aligned} \quad (15)$$

#### 1.4.3 第二类互功率谱

由文献[15]可知，此时， $G_{\alpha\alpha}(f)$  和  $G_{\beta\beta}(f)$  不相等。因此，互功率谱  $G_{\alpha\beta}(f, \nu)$  不能由式(7)直接获得。在地震工程中也有类似的问题，Der Kiureghian 和 Neuenhofer 建议使用下式对互功率谱进行建模：

$$G_{ab}(f) = \gamma_{ab}(f) [G_{aa}(f)G_{bb}(f)]^{1/2} \quad (16)$$

式中： $G_{aa}(f)$ 和 $G_{bb}(f)$ 分别为地震动场中两个不同场地的自功率谱，与其场地条件有关。 $\gamma_{ab}(f)$ 为两个场地间的相干函数，与两个场地的距离以及传播介质有关。

$$G_{\alpha\beta}(f) = \left[ \sum_j \sqrt{|\gamma_{\alpha\beta}(j, F_{\text{jump},\alpha})| |\gamma_{\alpha\beta}(j, F_{\text{jump},\beta})| G_{\alpha\alpha,j}(f, F_{\text{jump},\alpha}) G_{\beta\beta,j}(f, F_{\text{jump},\beta})} \right] \exp[i2\pi f(\Delta T_\beta(F_{\text{jump},\beta}) - \Delta T_\alpha(F_{\text{jump},\alpha}))] \quad (17)$$

式中：括号内的 $F_{\text{jump},\alpha}$ 和 $F_{\text{jump},\beta}$ 用于区分两个人具有不同的跳跃频率。当两个人的跳跃主频相同时，式(15)和式(17)是一致的。因此，式(17)是两个人互功率谱的统一模型，对第一类和第二类互功率谱都适用。接下来，要利用人群跳跃试验数据来获得给定跳跃频率下的 $|\gamma_{\alpha\beta}(j)|$ 和 $(\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_{n_p})$ 。

## 2 人群跳跃荷载试验

### 2.1 验证试验

同步记录跳跃人群中所有跳跃者各自的荷载时程是试验的关键。单人跳跃试验通常使用测力板来获得荷载时程。在人群试验中，受仪器数量、成本等限制，无法再采用测力板同步记录所有跳跃者的荷载时程。对此，本研究引入三维动作捕捉技术作为一种间接测试方法测量人群跳跃荷载。该方法将marker点粘贴在跳跃者身上，通过红外高速摄像头记录marker点的空间位置变化。

为检验此新型测试方法的可行性，在上海曙光医院步态实验室进行了验证试验。该实验室配备有Vicon运动分析系统，包括12个T40红外摄像机以及4块AMTI生物力学测力板。两位志愿者参与试验，他们在节拍器引导下完成4个固定频率的跳跃试验：1.5、2.0、2.67和3.5Hz。每位志愿者锁骨处粘贴有marker点，跳跃过程中，Vicon系统同时记录其跳跃荷载和marker点的空间位置。

由测力板记录可以得到每个志愿者的重力加速度归一化的质心加速度： $x_\alpha(t) = (F_\alpha(t) - w_\alpha) / w_\alpha$ 。式中 $F_\alpha(t)$ 是其测力板数据； $w_\alpha$ 是其体重。将测力板得到的 $x_\alpha(t)$ 和对应的marker点结果进行对比。以2.0Hz工况为例，图2对比了加速度时程，图3对比了加速度时程的样本自功率谱和互功率谱。

由图2和图3可以看出，加速度时程，自功率谱以及互功率谱的实部和虚部，测力板和marker点的结果都有相同的形状，但是幅值不同。而且，图3可以证明互功率谱的实部和虚部与自功率谱有着相同的形

前述研究已经发现了人群协同性与跳跃频率有关<sup>[6-11]</sup>，即 $|\gamma_{\alpha\beta}(j)|$ 和 $(\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_{n_p})$ 与 $F_{\text{jump}}$ 有关。因此，当两个人的跳跃频率不同时，其互功率谱模型假设为下式：

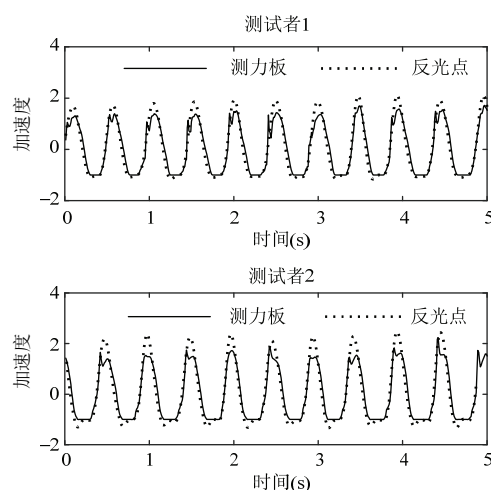


图2 测力板和 marker 点得到的加速度时程  
Fig.2 Acceleration results obtained by force plates and markers for one jump

状，即式(11)的假定。

相干函数取决于实部能量比例 $R_{\alpha\beta}(j)$ 和虚部能量比例 $V_{\alpha\beta}(j)$ 。对于两条样本 $x_\alpha(t)$ 和 $x_\beta(t)$ ，其样本实部能量比例 $r_{\alpha\beta}(j)$ 和虚部能量比例 $v_{\alpha\beta}(j)$ 可以由下式计算：

$$r_{\alpha\beta}(j) = \frac{\int_{f_j - \Delta f_j}^{f_j + \Delta f_j} \text{Re}[g_{\alpha\beta}(f)] df}{\sqrt{\int_{f_j - \Delta f_j}^{f_j + \Delta f_j} g_{\alpha\alpha}(f) df \times \int_{f_j - \Delta f_j}^{f_j + \Delta f_j} g_{\beta\beta}(f) df}} \quad (18)$$

$$v_{\alpha\beta}(j) = \frac{\int_{f_j - \Delta f_j}^{f_j + \Delta f_j} \text{Im}[g_{\alpha\beta}(f)] df}{\sqrt{\int_{f_j - \Delta f_j}^{f_j + \Delta f_j} g_{\alpha\alpha}(f) df \times \int_{f_j - \Delta f_j}^{f_j + \Delta f_j} g_{\beta\beta}(f) df}} \quad (19)$$

式中： $f_j = j f_{\text{jump}}$ 、 $\Delta f_j = 0.1 f_j$ 、 $f_{\text{jump}}$ 为单人跳跃荷载样本的主频，与文献[15]中单人跳跃荷载自功率谱能量分布一致； $g_{\alpha\alpha}(f)$ 和 $g_{\beta\beta}(f)$ 为 $x_\alpha(t)$ 和 $x_\beta(t)$ 的样本自功率谱； $g_{\alpha\beta}(f)$ 为 $x_\alpha(t)$ 和 $x_\beta(t)$ 的样本互功率谱。对于验证试验中的所有工况，利用式(18)和式(19)计算了测力板和marker点对应的 $r_{\alpha\beta}(j)$ 和 $v_{\alpha\beta}(j)$ ，其结果见表1，\*和^分别表示测力板和marker点的结果。

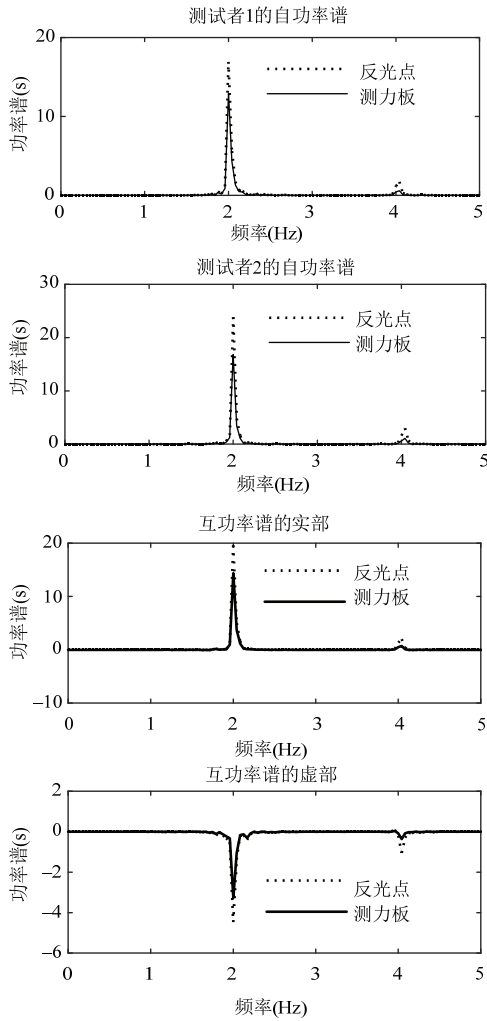


图 3 测力板和 marker 点得到的样本自功率谱和互功率谱

Fig.3 Sample auto-PSDs and sample cross-PSDs obtained by force plates and markers

从表 1 可以看出, marker 点和测力板得到的  $r_{12}(j)$  和  $v_{12}(j)$  ( $\alpha=1, \beta=2$ ) 在  $j=1, 2$  时非常接近。而当  $j=3$  时, marker 点和测力板得到的结果不一致。因为 marker 点粘贴在皮肤上, 由此导致的高频抖动会影响高频成份的测量精度。且随着阶数的增大, 跳跃荷载的能量越来越小, 此抖动的影响也越来越大。验证试验证明了可以利用三维动作捕捉技术代替测力板来获得相干函数在前两阶处的取值。因此, 人群跳跃荷载建模时, 只考虑互功率谱的前两阶, 即  $j=1, 2$ 。

### 2.2 人群试验

人群跳跃荷载试验共招募来自同济大学的 96 名学生为志愿者, 分两天进行, 每天有 48 名志愿者参与, 站成 6 行 8 列, 彼此间的距离为 1m。为防止志愿者的 marker 点被他人遮挡, 在其锁骨处粘贴 3 个 marker 点。试验安装了 18 个 Vicon T160 红外摄像头, 全面记录所有人的 marker 点轨迹, 所有志愿者在节拍器引导下在刚性地面上共同跳跃, 如图 4 所示。每次跳跃持续 30s, 采样频率 100Hz。节拍器频率从 1.5Hz 到 3.5Hz, 间隔 0.1Hz。每个节拍器频率重复 3 到 5 次。



图 4 人群试验

Fig.4 Experiment for crowd jumping

表 1 两位志愿者的  $r_{\alpha\beta}(j)$  和  $v_{\alpha\beta}(j)$  值

Table 1 Values for  $r_{\alpha\beta}(j)$  and  $v_{\alpha\beta}(j)$  between two test subjects

节拍器 (Hz)	$3.5^1$	$3.5^2$	$3.5^3$	$1.5^1$	$2.0^1$	$2.0^2$	$2.0^3$	$2.67^1$	$2.67^2$	$2.67^3$
$\hat{r}^{\wedge} 12(1)$	-0.081	-0.184	0.320	0.875	0.869	0.936	0.849	0.809	0.841	0.915
$\hat{r}^* 12(1)$	-0.083	-0.181	0.319	0.873	0.873	0.937	0.852	0.808	0.844	0.914
$\hat{v}^{\wedge} 12(1)$	-0.583	-0.393	-0.642	0.383	-0.282	-0.259	0.060	0.000	-0.458	-0.273
$\hat{v}^* 12(1)$	-0.582	-0.399	-0.639	0.390	-0.279	-0.259	0.061	0.008	-0.456	-0.273
$\hat{r}^{\wedge} 12(2)$	-0.126	-0.118	-0.160	0.469	0.554	0.822	0.654	0.565	0.449	0.644
$\hat{r}^* 12(2)$	-0.173	-0.158	-0.168	0.525	0.526	0.842	0.676	0.568	0.412	0.622
$\hat{v}^{\wedge} 12(2)$	-0.104	-0.037	-0.384	0.164	-0.362	-0.334	-0.033	0.020	-0.598	-0.345
$\hat{v}^* 12(2)$	-0.125	-0.063	-0.406	0.441	-0.422	-0.326	-0.059	-0.036	-0.659	-0.432
$\hat{r}^{\wedge} 12(3)$	-0.354	-0.174	-0.042	0.178	0.159	0.579	0.581	0.360	0.229	0.472
$\hat{r}^* 12(3)$	-0.462	0.162	-0.069	0.397	-0.149	0.407	0.336	0.278	-0.116	0.162
$\hat{v}^{\wedge} 12(3)$	-0.164	0.035	-0.333	0.428	-0.389	-0.467	-0.077	0.015	-0.489	-0.048
$\hat{v}^* 12(3)$	-0.074	0.009	-0.456	0.414	-0.325	-0.349	-0.125	-0.213	-0.302	-0.319

注:  $3.5^1$  表示 3.5Hz 第一次跳跃



续表 2

跳跃频率 (Hz)	节拍器(Hz)																				
	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
1.60	1067	<b>3907</b>	149	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.65	467	2053	299	61	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.70	267	1258	<b>5821</b>	183	91	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.75	67	265	995	0	46	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.80	133	530	995	<b>5854</b>	91	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.85	200	530	348	1220	183	48	118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.90	0	397	299	915	<b>7489</b>	242	118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1.95	133	265	149	305	1096	290	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.00	67	66	249	488	320	<b>7198</b>	59	58	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.05	67	66	199	488	183	870	294	174	121	60	0	0	46	0	0	0	0	0	0	0	0
2.10	0	66	100	305	183	386	<b>8000</b>	0	182	60	0	90	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.15	0	0	0	122	183	145	647	523	121	120	0	0	0	0	0	57	0	0	0	0	0
2.20	0	0	50	0	0	242	59	<b>8314</b>	242	0	0	0	139	0	56	0	78	0	0	0	0
2.25	0	0	50	0	0	242	294	349	242	180	91	90	46	46	0	0	0	0	0	0	0
2.30	0	0	50	61	91	97	59	174	<b>8303</b>	120	364	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.35	0	0	0	0	0	0	176	58	121	180	273	45	93	46	56	57	0	0	0	0	0
2.40	0	0	0	0	0	48	59	116	121	<b>8443</b>	91	226	139	92	0	0	0	79	81	0	0
2.45	0	0	50	0	0	97	59	58	242	299	409	271	231	46	112	0	0	0	0	80	79
2.50	0	0	0	0	0	48	59	0	61	60	<b>8409</b>	90	93	229	112	57	78	79	0	0	0
2.55	0	0	0	0	46	48	0	116	121	60	182	543	231	92	225	172	78	0	0	0	0
2.60	67	0	0	0	0	0	0	0	61	60	0	<b>8054</b>	185	138	56	115	78	0	0	0	157
2.65	0	0	0	0	0	0	0	58	61	180	182	90	648	46	56	115	0	79	81	0	0
2.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	181	<b>7639</b>	92	112	115	78	0	81	80	0
2.75	133	0	0	0	0	0	0	0	0	60	0	90	139	596	225		78	0	0	80	0
2.80	0	0	0	0	0	0	0	0	0	60	0	90	46	<b>7844</b>	281	230	0	79	0	0	0
2.85	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	90	46	367	506	172	156	79	81	0	0
2.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	139	92	<b>7135</b>	115	78	157	81	0	157
2.95	0	132	0	0	0	0	0	0	0	60	0	45	0	46	393	517	78	157	81	240	0
3.00	67	66	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	92	281	<b>7011</b>	156	157	81	80	0
3.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0	112	230	156	157	0	80	157
3.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	172	<b>7344</b>	79	81	0	79
3.15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	46	0	115	391	472	163	160	0
3.20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	172	234	<b>7244</b>	163	240	157
3.25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	169	287	313	79	894	240	236
3.30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	234	157	<b>6992</b>	80	394
3.35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	57	78	79	81	320	79
3.40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	551	325	<b>7440</b>	157
3.45	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	57	78	236	163	160	709
3.50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	57	0	0	244	80	<b>6614</b>
3.55	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	56	0	156	79	0	240	236
3.60	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	81	0	79
3.65	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56	0	78	0	81	80	315
3.70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0	115	0	0	163	320	394

$$c_{\alpha\beta}(\tau) = \mathbb{E}[x_{\alpha}(t)x_{\beta}(t+\tau)] = \mathbb{E}[x_{\alpha}(t)x_{\alpha}(t+\tau - \Delta t_{\alpha\beta})] = c_{\alpha\alpha}(\tau - \Delta t_{\alpha\beta}) \quad (20)$$

式中： $c_{\alpha\alpha}(\tau - \Delta t_{\alpha\beta})$  当  $\tau = \Delta t_{\alpha\beta}$  取得最大值。因此，将  $c_{\alpha\beta}(\tau)$  取得最大值时对应的  $\tau$  为  $x_{\alpha}(t)$  和  $x_{\beta}(t)$  的样本时间差  $\Delta t_{\alpha\beta}$ 。由于跳跃荷载的近似周期性，该时间差的取值范围是  $[-1/(2f_{\text{jump}}), 1/(2f_{\text{jump}})]$ 。然后利用式 (20)，计算每一次跳跃，任何两条样本之间的时间差。

同一次跳跃的时间差应满足闭合性。因此，对每一次跳跃得到的所有时间差利用式 (21) 和 (22) 计算其闭合性误差  $t_{\text{err}}$ 。

$$\Delta t'_{\alpha\beta} = \Delta t_{\alpha\beta} - \Delta t_{\alpha 1} \quad (\alpha = 1, 2 \dots n_p, \beta = 1, 2 \dots n_p) \quad (21)$$

$$t_{\text{err}} = \Delta t'_{\alpha+1, \beta} - \Delta t'_{\alpha\beta} \quad (\alpha = 1, 2 \dots n_p, \beta = 1, 2 \dots n_p - 1) \quad (22)$$

图 7 展示了 2.3Hz 某次跳跃的闭合性误差，样本时间差  $\Delta t_{\alpha\beta}$  的闭合性误差很小，可以证明式 (13)，即  $\Delta T_{\alpha\beta}$  满足闭合性。因此，可以利用一组时间滞后 ( $\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_{n_p}$ ) 来表示任意两个人的时间差。将式 (21) 得到的 ( $\Delta t'_{1\alpha}, \Delta t'_{2\alpha}, \dots, \Delta t'_{n_p\alpha}$ ) 取均值作为第  $\alpha$  个志愿者的样本时间滞后  $\Delta t_{\alpha}$ 。最终，对每次跳跃，可以得到一组样本时间滞后 ( $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_{n_p}$ )。

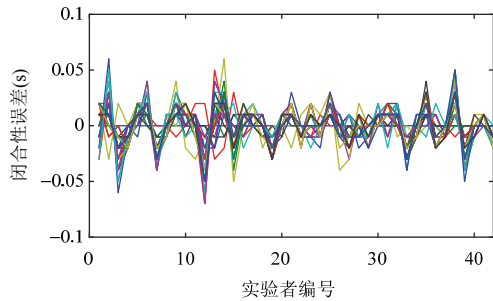


图 7 2.3Hz 某次跳跃的时间差的闭合性误差  
Fig.7 Closure errors for one jump of 2.3Hz

由于时间参考点可以任意选取，且人群协同性取决于 ( $\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_{n_p}$ ) 的离散性。因此，可将每组样本的时间滞后 ( $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_{n_p}$ ) 进行平移，使其均值为 0。将所有  $f_{\text{jump}}$  相同的  $\Delta t_{\alpha}$  放在一起统计，如图 8 所示。时间滞后服从均值为 0 的正态分布，如粗实线所示，其在给定跳跃频率下的标准差见表 3。

### 3.4 时间对齐荷载的相干函数

在同一次跳跃中，时间差满足闭合性。因此，通过式 (23) 引入时间对齐的跳跃荷载样本  $y_{\alpha}(t)$ ：

$$y_{\alpha}(t) = x_{\alpha}(t - \Delta t_{\alpha}) \quad (23)$$

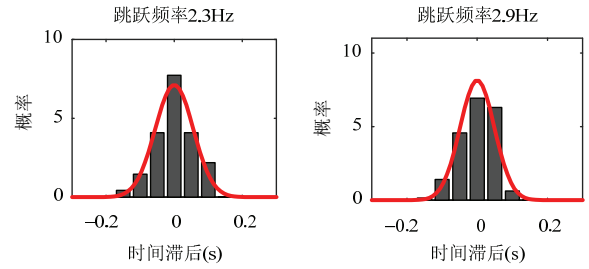


图 8 时间滞后的概率密度函数  
Fig.8 PDF of the time lag-shift

表 3 人群跳跃荷载互功率谱模型参数取值

Table 3 Parameter values for the cross-PSD model of crowd jumping loads

$F_{\text{jump}}$ (Hz)	$\sigma$	$r_{\alpha\beta}(1)$	$ v_{\alpha\beta}(1) $	$r_{\alpha\beta}(2)$	$ v_{\alpha\beta}(2) $	$ \gamma_{\alpha\beta}(1) $	$ \gamma_{\alpha\beta}(2) $
1.5	0.131	0.618	0.114	0.245	0.175	0.628	0.301
1.6	0.084	0.615	0.082	0.166	0.176	0.620	0.242
1.7	0.098	0.695	0.104	0.283	0.160	0.702	0.325
1.8	0.084	0.624	0.103	0.268	0.158	0.632	0.311
1.9	0.069	0.722	0.070	0.358	0.129	0.725	0.381
2.0	0.071	0.760	0.060	0.387	0.122	0.762	0.405
2.1	0.059	0.784	0.051	0.429	0.106	0.785	0.442
2.2	0.054	0.796	0.051	0.451	0.104	0.798	0.463
2.3	0.057	0.783	0.054	0.437	0.102	0.785	0.449
2.4	0.053	0.794	0.051	0.441	0.098	0.795	0.452
2.5	0.042	0.807	0.049	0.501	0.087	0.809	0.509
2.6	0.053	0.728	0.085	0.387	0.125	0.733	0.407
2.7	0.054	0.718	0.072	0.386	0.106	0.722	0.401
2.8	0.053	0.711	0.096	0.356	0.124	0.718	0.377
2.9	0.047	0.723	0.081	0.352	0.112	0.727	0.369
3.0	0.049	0.740	0.059	0.374	0.107	0.743	0.389
3.1	0.045	0.720	0.058	0.352	0.106	0.722	0.368
3.2	0.042	0.758	0.057	0.401	0.115	0.760	0.417
3.3	0.042	0.687	0.068	0.323	0.121	0.691	0.345
3.4	0.037	0.701	0.076	0.317	0.127	0.705	0.342
3.5	0.041	0.661	0.069	0.262	0.137	0.665	0.296

时间对齐只改变相干函数的相位，不改变其幅值，即  $|\gamma_{\alpha\beta}(j)|$  保持不变。利用式 (18) 和式 (19) 计算每一次跳跃，任意两条时间对齐样本的前 2 阶实部面积比  $r_{\alpha\beta}(j)$  和虚部面积比  $v_{\alpha\beta}(j)$ 。当跳跃人数为  $n_p$  时，所有的  $r_{\alpha\beta}(j)$  和  $v_{\alpha\beta}(j)$  形成  $n_p$  阶方阵。因为样本互功率谱  $g_{\alpha\beta}(f)$  和  $g_{\beta\alpha}(f)$  互为共轭，所以  $r_{\alpha\beta}(j)$  形成的方阵是对称的，而  $v_{\alpha\beta}(j)$  形成的方阵是反对称的。因此，在接下来分析中，只提取  $r_{\alpha\beta}(j)$  和



$v_{\alpha\beta}(j)$  的不包含对角线的下三角元素。将所有  $f_{\text{jump}}$  相同的  $r_{\alpha\beta}(j)$  和  $v_{\alpha\beta}(j)$  放在一起统计。相位谱  $\varphi_{\alpha\beta}(f)$  的绝对值取决于  $|v_{\alpha\beta}(j)|$  和  $r_{\alpha\beta}(j)$ ，因此取所有  $|v_{\alpha\beta}(j)|$  和  $r_{\alpha\beta}(j)$  的均值作为模型值  $|V_{\alpha\beta}(j)|$  和  $R_{\alpha\beta}(j)$ 。最后，利用式 (11) 计算相干函数的模型  $|\gamma_{\alpha\beta}(j)|$ ，结果见表 3。

$|\gamma_{\alpha\beta}(1)|$  和  $|\gamma_{\alpha\beta}(2)|$  的值与  $R_{\alpha\beta}(1)$  和  $R_{\alpha\beta}(2)$  的值非常接近。 $|\gamma_{\alpha\beta}(1)|$  和  $R_{\alpha\beta}(1)$  的平均误差为 0.004； $|\gamma_{\alpha\beta}(2)|$  和  $R_{\alpha\beta}(2)$  的平均误差为 0.024。说明时间对齐后的人群跳跃荷载的相位谱  $\varphi_{\alpha\beta}(f)$  接近 0， $\varphi_{\alpha\beta}(f)$  的主要特征可以由  $(\Delta T_1, \Delta T_2, \dots, \Delta T_{n_p})$  获得。

### 4 结构响应预测步骤

根据目前得到的人群跳跃荷载互功率谱模型以及随机振动理论，对结构进行响应预测可以分为 7 个步骤：

- (1) 根据结构的的功能需求在 1.5Hz 到 3.5Hz 范围内选择节拍器频率，例如可以假定节拍器频率或其倍频与结构某一阶频率相同，即共振假定。
- (2) 根据节拍器频率按照表 2 的概率质量函数随机生成第  $\alpha$  个跳跃者的跳跃频率  $F_{\text{jump},\alpha}$ 。
- (3) 根据文献[15]确定第  $\alpha$  个跳跃者的第  $j$  阶自功率谱  $G_{\alpha\alpha,j}(f, F_{\text{jump},\alpha})$ 。
- (4) 根据  $F_{\text{jump},\alpha}$ ，利用表 3 中的  $\sigma$  随机生成第  $\alpha$  个跳跃者的  $\Delta T_\alpha(F_{\text{jump},\alpha})$ 。
- (5) 根据  $F_{\text{jump},\alpha}$ ，利用表 3 得到第  $\alpha$  个跳跃者的  $|\gamma_{\alpha\beta}(j, F_{\text{jump},\alpha})|$ 。
- (6) 根据文献[15]获得第  $\alpha$  个跳跃者的自功率谱  $G_{\alpha\alpha}(f)$  以及式 (17) 获得第  $\alpha$  个跳跃者和第  $\beta$  个跳跃者的互功率谱  $G_{\alpha\beta}(f)$ 。
- (7) 根据式 (3) 和式 (5) 预测结构上检测点处加速度响应的自功率谱  $G_A(f)$  以及均方根值  $a_{\text{rms}}$ 。

### 5 试验验证

结构验证试验在中国某城市火车站的二层候车大厅进行。该钢筋混凝土楼板尺寸是 90m×30m，厚 400mm。为满足建筑物净高要求，采用体外预应力的形式。试验共组织 8 位志愿者在楼板上进行人群跳跃荷载下结构响应测试，共包含 4 个工况，人

数分别是 2、6、8、8。结构的基频是 2.256Hz，所有志愿者在 2.3Hz 节拍器引导下进行跳跃，使结构 1 阶共振。位于楼板中心的加速度传感器(LC0132T)同步记录楼板的加速度响应，采样频率为 200Hz。关于该楼板及试验的详细内容见文献[16]。

由楼板有限元模型计算得到的模态参数见表 4。楼板前 2 阶自振频率的计算值与现场实测值一致，因此由该有限元模型获得的楼板的模态信息可以用于后续的结构响应的计算。

表 4 结构模态信息

Table 4 The structural modal properties

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
振动频率 (Hz)	2.256	2.666	3.011	3.801	4.220	4.621	4.793	4.797	4.932
模态质量 ( $10^5$ kg)	7.425	9.069	7.429	8.115	5.325	5.649	4.504	5.514	4.355
阻尼比	0.03	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015	0.015

对于每一个工况，利用第 4 节介绍的结构响应预测步骤，对楼板响应进行 200 次模拟。计算中，考虑楼板的前 9 阶振型。首先比较了楼板中心的模拟  $a_{\text{rms}}$  和实测  $a_{\text{rms}}$ ，模拟  $a_{\text{rms}}$  的均值和标准差以及实测  $a_{\text{rms}}$  如图 9 所示。对于第 4 个工况，在结构 1 阶频率处对比了楼板中心的实测  $G_A(f)$  以及 5 组模拟  $G_A(f)$ ，如图 10 所示。由于分辨率不同，所以比较的是这些曲线的面积，即能量，而不是其具体形状。5 组模拟  $G_A(f)$  平均能量为  $0.00198\text{m}^2/\text{s}^4$ ，与实测值  $0.00212\text{m}^2/\text{s}^4$  非常接近。

在设计体育看台等大跨楼盖结构时，跳跃人群的数量和他们在结构上的分布可由结构的功能需求确定。并且按照本文第 4 节给出的结构响应预测步骤对结构加速度响应进行多次模拟。然后按照结构的使用性能要求，确定结构的可靠度  $p$ 。最终，结构

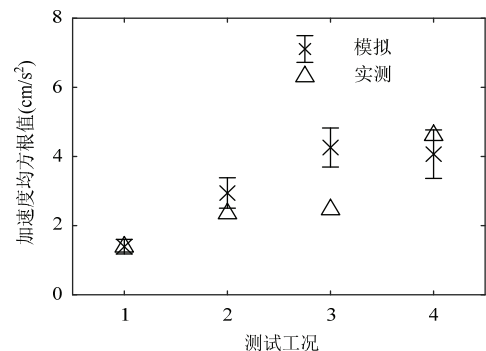


图 9 模拟楼板响应的加速度均方根值和实测值对比  
Fig.9 Comparison of measured and simulation  $a_{\text{rms}}$

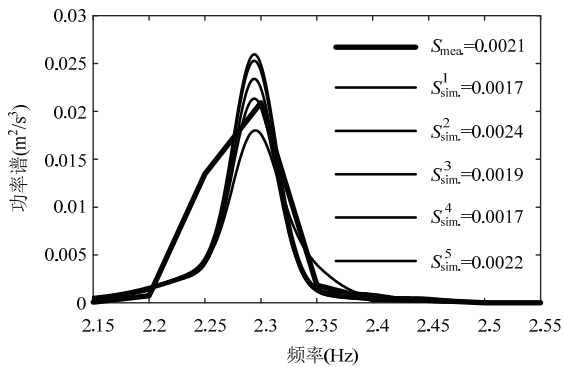


图 10 模拟楼板响应的自功率谱和实测值对比

Fig. 10 Comparison of measured and simulation  $G_A(f)$

加速度响应的设计值可由结构加速度响应的多次模拟结果和  $p$  确定。

## 6 结论

本研究提出了人群跳跃荷载的互功率谱模型。首先根据任意两个跳跃者是否具有相同主频, 将互功率谱分为两类。利用三维动作捕捉技术, 开展了包含 96 名志愿者的人群跳跃试验, 构建了独特的人群跳跃荷载数据库。从试验数据中识别出互功率谱模型的参数取值, 以及跳跃者跳跃频率的分布。通过将模型预测值与楼板实测响应进行比较, 验证了所提出的人群跳跃荷载模型及其基于随机振动理论在结构响应分析中的应用。

### 参 考 文 献

- [1] Živanović S, Pavic A, Reynolds P. Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation: a literature review [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 279(1/2): 1-74
- [2] Racic V, Pavic A. Mathematical model to generate near-periodic human jumping force signals [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2010, 24(1): 138-152
- [3] De Brito V L, Pimentel R L. Cases of collapse of demountable grandstands [J]. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 2009, 23(3): 151-159
- [4] Lee S H, Lee K K, Woo S S, et al. Global vertical mode vibrations due to human group rhythmic movement in a 39-story building structure [J]. *Engineering Structures*, 2013, 57: 296-305
- [5] 搜狐科技. 不可思议! 墨西哥世界杯球迷仅仅通过跳跃就引发了一场人工地震 [EB/OL]. [2018-06-19]. [http://www.sohu.com/a/236576180\\_100136930](http://www.sohu.com/a/236576180_100136930)
- [6] Ellis B R, Ji T. Loads generated by jumping crowds: Numerical modelling [J]. *Structural Engineer*, 2004, 82(17): 35-40
- [7] Sim J, Blakeborough A, Williams M S, et al. Statistical model of crowd jumping loads [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2008, 134(12): 1852-1861
- [8] Kasperski M, Agu E. Prediction of crowd-induced vibrations via simulation [C]//23rd International Modal Analysis Conference. Orlando, Florida, USA, 2005
- [9] Parkhouse J G, Ewins D J. Crowd-induced rhythmic loading [J]. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings*, 2006, 159(5): 247-259
- [10] Martínez J F, Hermanns L, de Lerma A F, et al. Jumping load models applied on a gymnasium floor [J]. *Engineering Structures*, 2016, 125: 26-38
- [11] Li G, Ji T J, Chen J. Determination of the dynamic load factors for crowd jumping using motion capture technique [J]. *Engineering Structures*, 2018, 174: 1-9
- [12] Vanmarcke E. Random fields: analysis and synthesis [M]. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2010
- [13] Harichandran R S, Vanmarcke E H. Stochastic variation of earthquake ground motion in space and time [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, 112(2): 154-174
- [14] Kiureghian A D, Neuenhofer A. Response spectrum method for multi - support seismic excitations [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1992, 21(8): 713-740
- [15] 陈隽, 熊杰程. 跳跃荷载的功率谱模型研究 [J]. *土木工程学报*, 2018, 51(9): 56-65 (Chen Jun, Xiong Jiecheng. Power spectral density model for human jumping load [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2018, 51(9): 56-65 (in Chinese))
- [16] Chen J, Zhang M, Liu W. Vibration serviceability performance of an externally prestressed concrete floor during daily use and under controlled human activities [J]. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 2016, 30(2): 1

熊杰程 (1991—), 男, 博士研究生。主要从事人致振动方面的研究。

陈隽 (1972—), 男, 博士, 教授。主要从事人致振动、多重灾害方面的研究。