扬州大学

2018年硕士研究生招生考试初试试题（ A 卷）

科目代码 658　　科目名称 高等数学（理）　　满分 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、计算题（共48分，6分/题）

1. 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. 设 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，且 $f(x)$ 可导，求 $f'(x)$.

3. 设 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=x^2$，$\varphi(x)=x^3$，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[\varphi(x)]$.

4. 计算定积分 $\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$.

5. 设 $z=x^2+3y^2$，$x=3t, y=\sin t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

6. 设平面曲线的方程为：$y=1-\cos x$，求该曲线在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

7. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

8. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy^2$ 满足 $y\big|_{x=0}=-1$ 的特解.

二、解答题（共42分，14分/题）

1. 已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 在 $x=1$ 处有极值 -2.

(1) 确定系数 a、b 的值；

(2) 求 $f(x)$ 的所有极小值和极大值.

2. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D (3x+2y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由两坐标轴及直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆形闭区域：$x^2+y^2\le 1$.

3. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和 $s_n = \dfrac{3^n - 1}{3^{n-1}}$.

(1) 求 u_n;

(2) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性.

三、应用题（共 30 分，15 分/题）

1. 已知制作一个背包的成本为 40 元，如果每一个背包的售价为 x 元，售出的背包数为 $n = \dfrac{1200}{x-40} + 45(80-x)$.

(1) 求利润函数 $p(x)$;

(2) 问怎样定价利润最大?

(3) 求获得最大利润时售出的背包个数.

2. 设由 $y = x^3, x = 2$ 和 $y = 0$ 所围成的平面图形为 D.

(1) 求平面图形 D 的面积 S；

(2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积 V_x；

(3) 求平面图形 D 绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积 V_y.

四、证明题（共 30 分，15 分/题）

1. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$, 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \int_b^x \dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$.

证明： 方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个实根.

2. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[[-a,a]$ 上连续.

证明：(1) $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(-x) + f(x)]\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x = 2$.