扬州大学

2018年硕士研究生招生考试初试试题（ A 卷）

科目代码 840　　科目名称 数学分析和高等代数综合　　满分 150

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

数学分析部分：

1.（10分）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

2.（10分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\int_0^{x^{\frac{2}{3}}} e^{\frac{1}{2}t^2}\,dt-x^{\frac{2}{3}}+1\right)$.

3（10分）设$y=y(x)$是由$y=-ye^x+2e^y\sin x-7x$所确定的可微函数，求$y'(0)$.

4.（15分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$的收敛域，并求其和函数.

5.（10分）设数列$\{x_n\}$满足：$0<x_n<1,\ (1-x_n)x_{n+1}>\dfrac{1}{4},\ n=1,2,\cdots$.

证明:数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限.

6.（10分）设函数$f(x)$在$[0,2a]$上连续，且$f(0)=f(2a)$.证明存在$x_0\in[0,a]$使得$f(x_0+a)=f(x_0)$.

7.（10分）证明不等式$3\sqrt{e}<\int_e^{4e}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx<6$.

高等代数部分：

8.（15 分）设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ & \dots & \dots & \dots & \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}(n\geq 3)$，（1）计算矩阵 A 的行列式 $|A|$；

（2）当 $a=1-n, b=1$ 时，求矩阵 A 的秩.

9.（15 分）设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$，

（1）证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（2）若 3 阶矩阵 A 满足 $A\alpha_1=\alpha_2, A\alpha_2=\alpha_3, A\alpha_3=\alpha_4$，求 $A\alpha_4$.

10.（15 分）设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶方阵，A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，证明：矩阵 A, A^* 的秩满足关系：$r(A^*)=\begin{cases} n & r(A)=n \\ 1 & r(A)=n-1 \\ 0 & r(A)<n-1 \end{cases}$.

11.（15 分）已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2kx_2x_3\,(k>0)$，经过正交线性替换化成标准型 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$. 求参数 k 及所用正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

12.（15 分）设 α,β 是 3 维单位列向量，且 $\alpha^T\beta=0, A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，其中 α^T 表示 α 的转置，证明：（1）齐次线性方程组 $AX=0$ 有非零解；（2）矩阵 A 相似于矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.