

山东师范大学

硕士研究生入学考试试题 (2014年)

考试科目名称：离散数学

试题编号：838

- 注意事项：1. 本试卷共六道大题（共计 6 个小题），满分 150 分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4. 是否允许使用普通计算器 否。

第一题（本题 30 分）设 $A=\{1,2,3,4\}$ ，在 A 上定义二元关系 R ：对任意的 $\langle u,v \rangle, \langle x,y \rangle \in A \times A, u,v,x,y \in A$ ，有 $R = \{ \langle \langle u,v \rangle, \langle x,y \rangle \rangle \mid u+y=v+x \}$ 。证明：

- 1, R 是 $A \times A$ 的等价关系；
- 2, 确定由 R 引起的 $A \times A$ 的等价类。

第二题（本题 15 分）若集合 A 与 B 之间存在双射函数，则称集合 A 与 B 是等势的。
证明：自然数集 N 与有理数集 Q 是等势的。

第三题（本题 30 分）在一个道路网络上连接有 8 个城市，分别标记为 a,b,c,d,e,f,g,h ，城市之间的直接连接的道路是单向的，

有 $a \rightarrow b, a \rightarrow c, b \rightarrow g, g \rightarrow b, c \rightarrow f, f \rightarrow e, b \rightarrow d, d \rightarrow f$ 。

- 1, (20 分) 对每个城市求出从它出发的所能到达的所有其他城市。
- 2, (10 分) 若每两个城市之间有连接距离的都是 1，给出所有城市之间可以到达的距离。

第四题（本题 25 分）

- 1, (15 分) 写出 $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)$ 的主析取范式和主合取范式。
- 2, (10 分) 证明 $(\forall x)(C(x) \rightarrow W(x) \wedge R(x)) \wedge (\exists x)(C(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(Q(x) \wedge R(x))$ 。

第五题 (本题共 30 分)

- 1, (10 分) 设 $S = \{x \mid x = a + b\sqrt{3}, a, b \in Q\}$, 其中 Q 是有理数。在 S 上的普通的加法 $+$ 以及普通的乘法 \bullet , 问 S 和 $+$ 、 \bullet 能否构成域? 为什么?
- 2, (20 分) 设 $\langle G, * \rangle$ 是个群, 则对任何 $a, b \in G$, 证明
- 1) 存在唯一元素 $x \in G$, 使得 $a * x = b$;
 - 2) 存在唯一元素 $y \in G$, 使得 $y * a = b$ 。

第六题 (本题 20 分)

学校有 s 个班级, 有 r 个教师为他们上课。设教员和班级的集合分别是 $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$, $V_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_s\}$, 令 m_{ij} 是教员 v_i 为班级 u_j 上课的小时数。

- 1, (10 分) 问学校每天至少要安排多少节课?
- 2, (10 分) 若 $r=4$, $s=5$, m_{ij} 如下表给出, 则每天至少要安排多少节课? 又至少需要多少个教室?

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
v_1	1	0	1	0	0
v_2	1	0	1	1	0
v_3	0	1	1	1	1
v_4	0	0	0	1	2