山 东 师 范 大 学

硕士研究生入学考试试题

(2014 年)

考试科目名称：高等数学 A　　　　　　　　试题编号：722

注意事项：1．本试卷共 六 道大题（共计 24 个小题），满分 150 分；

2．本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3．必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。

4．是否允许使用普通计算器＿＿否＿＿。

* *

一、单项选择题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x+a}{x-3}, & x\neq 3\\ 4, & x=3\end{cases}$ 在 $x=3$ 处连续，则 $a=($　　$)$.

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$-\frac{1}{3}$　　（C）-3　　（D）3

2. 下列条件中当 $\Delta x\to 0$ 时，使 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导的的条件是(　　).

（A） Δy 与 Δx 是等价无穷小

（B） Δy 与 Δx 是同阶无穷小

（C） Δy 是 Δx 较高阶的无穷小

（D） Δy 是 Δx 较低阶的无穷小

3. 若点 $P_0(x_0,y_0)$ 使函数 $f_x(x_0,y_0)=0$，且 $f_y(x_0,y_0)=0$ 成立，则下列结论正确的是(　　).

（A）点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的极值点

（B）点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的最小值点

（C）点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 的最大值点

（D）点 $P_0(x_0,y_0)$ 可能是 $f(x,y)$ 的极值点

4. 下列数项级数中发散的是(　　).

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$　　（B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$　　（C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$　　（D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

5. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解，C_1, C_2 为任意常数，则该非齐次方程的通解是（　　）.

（A）$C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$

（B）$C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3)$

（C）$C_1(y_1 + y_2) + C_2(y_2 + y_3) - y_3$

（D）$C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

1. 设 $f'(a)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{xf(a)-af(x)}{x-a}=$ ____________.

2. 若 $f(x)=\int_0^{x^2}\dfrac{1}{t+2}\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 单调增加且凸的区间为 ____________.

3. 设 $z=(1+xy)^y$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=$ ____________.

4. 设 $f(x,y)$ 连续且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)\,dxdy$，其中 D 是由 $y=0, y=x, x=1$ 围成的平面区域，则 $f(x,y)=$ ____________.

5. 微分方程 $y'=xy+y$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解是 ____________.

三、计算题（本题共 6 小题，每小题 10 分，满分 60 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$.

2. 求由参数方程 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t \\ y=\ln\tan\dfrac{t}{2}\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

3. 计算广义积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

4. 设函数 $z=f(2x-y,\ y\sin x)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

5. 计算二重积分 $\iint_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2-\pi)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\pi\}$.

6. 计算二重积分 $\iint_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$，$y=x^2$ 所围成的闭区域.

四、计算题二（本题共 2 小题，每小题 12 分，满分 24 分）

1. 设有幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$，

（1）求幂级数的收敛半径 R；（2）求幂级数在收敛区间内的和函数.

2. 解下列微分方程

（1）求微分方程 $xy' + 2y = x\ln x$ 满足条件 $y(1) = -\dfrac{1}{9}$ 的解.

（2）求微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = \dfrac{1}{2}$ 的特解.

五、证明题（本题满分 9 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a) < a$，$f(b) > b$，试证：

(1) 方程 $f(x) - x = 0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根；

(2) 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) > 1$.

六、应用题（本题满分 12 分）

设函数 $y = f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，若由曲线 $y = f(x)$，直线 $x=1$，$x=t$ $(t>1)$ 及 x 轴所围的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为 $\dfrac{\pi}{3}[t^2 f(t) - f(1)]$.

(1) 求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程；

(2) 求该微分方程满足条件 $y\big|_{x=2} = \dfrac{2}{9}$ 的解；

(3) 求(2)中所得的解函数在 $(0,+\infty)$ 上的极值.