

山东师范大学
硕士研究生入学考试试题
(2015年)

考试科目名称：高等数学 A

试题编号：601

- 注意事项：1. 本试卷共六道大题（共计24个小题），满分150分；
2. 本卷属试题卷，答题另有答题卷，答案一律写在答题卷上，写在该试题卷上或草纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；
3. 必须用蓝、黑钢笔或圆珠笔答题，其它均无效。
4. 是否允许使用普通计算器_____否_____。

一、单项选择题（本题共5小题，每小题4分，满分20分）

1. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x < 1 \\ a \cos \pi x, & x \geq 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则 $a = (\quad)$.

- (A) 2 (B) -2 (C) 1 (D) -1

2. 设函数 $f(x)$ 有连续的二阶导数，且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -3$ ，则 ().

- (A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值 (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的驻点但非极值点
(C) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 (D) $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微的充分条件是 ().

- (A) 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续
(B) 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处偏导数存在
(C) $\lim_{\rho \rightarrow 0} [\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y] = 0$
(D) $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\rho} = 0$

4. 下列数项级数中绝对收敛的是 ().

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

5. 设 $\varphi(x)$ 二阶可导, 则与积分方程 $\varphi(x) = e^x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$ 等价的微分方程初值问题是() .

(A) $\varphi'(x) = e^x$

(B) $\varphi''(x) + \varphi(x) = e^x$

(C) $\begin{cases} \varphi'(x) = e^x \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} \varphi''(x) + \varphi(x) = e^x \\ \varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 1 \end{cases}$

二、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 5 分, 满分 25 分)

1. 曲线 $e^y + xy = e$, 当 $x = 0$ 时的切线方程为 _____ .

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{-x^2} , 则 $\int xf'(x)dx =$ _____ .

3. 二元函数 $z = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$ 的极小值点是 _____ .

4. 交换积分次序后

$$\int_{-2}^0 dy \int_0^{y+2} f(x,y) dx + \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y) dx =$$

5. 微分方程 $\frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0$ 的满足条件 $y(3) = 4$ 的特解是 _____ .

三、计算题 (本题共 6 小题, 每小题 10 分, 满分 60 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1+t^2) e^{t^2-x^2} dt$.

2. 方程 $y - 2x = (x+y)\ln(x+y)$ 确定函数 $y = y(x)$, 求 $y''(0)$.

3. 计算不定积分 $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$.

4. 设 $z = f(x+y, xy)$, $x = \sin t$, $y = t$, 其中 f 具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{dz}{dt}$.

5. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) | (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

6. 计算二重积分 $\iint_D |y-x^2| dx dy$, 其中 $D = \{(x,y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

四、计算题二 (本题共 2 小题, 每小题 12 分, 满分 24 分)

1. 设有幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^n$,

(1) 求幂级数的收敛域; (2) 求幂级数在收敛区间内的和函数.

2. 解下列微分方程

(1) 求微分方程 $x^2y' + xy = y^2$ 的通解.

(2) 求微分方程 $y'' - 4y = e^{2x}$ 的通解.

五、证明题 (本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 是连续函数, 试证明: $\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)]dx$.

六、应用题 (本题满分 12 分)

设曲线 $y = \sqrt{x}$ 的一条切线为 L , 该曲线与切线 L 及直线 $x = 0$, $x = 2$ 围成一平面图形.

- (1) 试确定切线的方程, 使该平面图形的面积最小;
- (2) 求出此平面图形的面积;
- (3) 求出该图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.