扬州大学

2019年硕士研究生招生考试初试试题（ A 卷）

科目代码 840　科目名称 数学分析与高等代数 综合　满分 150

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

（数学分析部分）

1. （10分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{a}{n}-\arctan\dfrac{a}{n+1}\right),\quad a\neq 0.$

2. （10分）设函数 $y=y(x), x\in(-\infty,\infty)$ 是由方程 $y-x-\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的二阶可导函数，求 $y''(0)$.

3. （10分）证明 $\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}dx>0$.

4. （15分）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域，并求其和函数.

5. （15分）设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，证明

   (1) 在 (a,b) 内，$g(x)\neq 0$;

   (2) 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

6. （15分）设 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的正值连续函数，证明

   (1) 对任意正整数 n，存在唯一 $x_n\in[0,1]$ 使得 $\int_{\frac{1}{n}}^{x_n} f(x)dx=\int_{x_n}^{1}\dfrac{1}{f(x)}dx$;

   (2) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛；　若令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\int_0^a f(x)dx=\int_a^1\dfrac{1}{f(x)}dx$.

（高等代数部分）

1.（15分）设4维列向量组

$$\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T,\alpha_2=(2,2+a,2,2)^T,\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T,\quad \alpha_4=(4,4,4,4+a)^T$$

（1）a为何值时向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关？

（2）当向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关时，求向量组的一个极大线性无关组，并用该极大线性无关组表示其余向量。

2.（15分）已知线性方程组$\begin{cases} ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 2x_1+x_2+3x_3-3x_4=1 \end{cases}$有三个线性无关的解。

（1）证明：方程组系数矩阵的秩等于2；

（2）求a,b的值；

（3）求方程组的通解。

3.（15分）设A是3阶矩阵，α_1,α_2是A的属于特征值$\lambda_1=-1$的两个线性无关的特征向量，α_3是A的属于特征值$\lambda_2=1$的特征向量。

（1）判断$\alpha_1+\alpha_2$是否为矩阵A的特征向量，说明理由；

（2）判断$\alpha_2+\alpha_3$是否为矩阵A的特征向量，说明理由；

（3）证明：任意3维非零列向量$\beta(\beta\neq 0)$都是A^2的特征向量。

4.（15分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+ax_2^2+2x_1x_3+6x_2x_3+5x_3^2$的秩为2，$a$为参数。

（1）求a的值；

（2）求二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的标准形；

（3）求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解。

5.（15分）设A,B,C,D均为4阶非零矩阵，其中B,C都是可逆矩阵，且$ABCD=0$。$R(X)$表示矩阵X的秩。

（1）证明：$10\le R(A)+R(B)+R(C)+R(D)\le 12$；

（2）试给出满足$R(A)+R(B)+R(C)+R(D)=10$的一组4阶非零矩阵A,B,C,D，并加以说明。