扬 州 大 学

2019 年硕士研究生招生考试初试试题（ A 卷）

科目代码 **833** 科目名称 高等代数（工） 满分 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、（20 分）已知 A 为 n 阶方阵，$e_n=[0,\cdots,0,1]^T\in R^n$，求 $(\lambda I-A)^{-1}e_n$，其中 I 是单位矩阵，

$$A=\begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -l_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -l_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

二、（15 分）已知矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\mathrm{diag}(1,1,1,8)$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，求矩阵 B，其中 I 是单位矩阵。

三、（20 分）设方阵 A 满足：$A^2-3A+2I=O$，证明：A 及 $A-4I$ 都可逆，且 A 的特征值只能为1 或2，求 A^{-1} 及 $(A-4I)^{-1}$，其中 I 是单位矩阵，O 是零矩阵。

四、（25 分）

已知线性方程组 $$\begin{cases} 2x_1-2x_2+2x_3+2x_4=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3+(a-1)x_4=-1 \\ -x_2+2x_3+2x_4=1 \\ x_2+(a-4)x_3-2x_4=b+1 \end{cases}$$

(1) （8 分）a, b 何值时上述方程组有唯一解；

(2) （7 分）a, b 何值时上述方程组无解；

(3) （10 分）a, b 何值时上述方程组有无穷多解？并求出有无穷多组解时的通解。

五、（25 分）已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$，

(1) （10 分）求 A 的特征值和特征向量；

(2) （8 分）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵；

(3) （7 分）求正交矩阵 T，使 $T^{-1}AT=\Lambda$ 为对角矩阵。

六、(15 分)设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，又 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_1-\alpha_2,\beta_3=\alpha_1+\alpha_3$，证明：$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关。

七、(15 分) 已知A，B均为n阶方阵，且A可逆，证明$I+AB$与$I+BA$有相同的特征值，其中I是单位矩阵。

八、(15 分) 已知 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

(1) (8 分) 证明矩阵A与B相似；

(2) (7 分) 求相似变换阵P，使得$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。