扬州大学

2019年硕士研究生招生考试初试试题（ A 卷）

科目代码 822　　科目名称 高等代数（理）　　满分 150

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

1.（15分）已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad +6x_4=-4 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \end{cases}$ 有三个线性无关的解。

（1）证明：方程组系数矩阵的秩等于2；

（2）求a,b的值；

（3）求方程组的通解。

2.（15分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$A^*$是$A$的伴随矩阵，若矩阵$B$满足$ABA^*=2BA^*+E$，

其中E是单位矩阵。求矩阵B，以及它行列式$|B|$。

3. 设向量组

$$\alpha_1=(1,0,2,3),\alpha_2=(1,1,3,5),\alpha_3=(1,-1,a+2,1),\alpha_4=(1,2,4,a+8),\alpha_5=(1,1,4,5)$$

（1）当a为何值时，向量组的秩等于3？

（2）当向量组的秩为3时，求向量组的一个极大线性无关组，并用它表示其余向量。

4.（15分）设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式，且各项系数之和

$a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0$是奇数。

（1）试判断$f(x)$能否被$x-1$整除，说明理由；

（2）试判断$f(x)$能否被$x+1$整除，说明理由。

5.（15分）设σ是数域P上线性空间V的线性变换，λ_1,λ_2是σ的特征值，且$\lambda_1\neq\lambda_2$。

（1）如果α_1,α_2分别为σ的属于λ_1,λ_2的特征向量，试证：α_1,α_2线性无关；

（2）若$V_{\lambda_1},V_{\lambda_2}$分别是特征值$\lambda_1,\lambda_2$的特征子空间，试证：$V_{\lambda_1}+V_{\lambda_2}$是直和。

6.（15 分）设σ是n欧氏空间V上的线性变换，满足$\sigma^3+\sigma=0$。A是σ在某一组基下的矩阵，$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$表示矩阵$A$的迹。证明：

（1）存在V的一组基，使得σ在这组基下的矩阵是对角形矩阵；（2）$tr(A)=0$。

7.（15 分）设$C^{3\times3}$是全体 3 阶复数矩阵组成的集合，$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}\in C^{3\times3}$。

（1）求矩阵A的若尔当$(Jordan)$标准形矩阵J；

（2）证明：在$C^{3\times3}$中，矩阵方程$X^2=A$无解。

8.（15 分）设$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$是实数矩阵，$A^T$表示矩阵$A$的转置矩阵。

（1）求线性方程组$A^TAX=0$的通解；

（2）讨论二次型$f(x_1,x_2,x_3)=X^TA^TAX$的正定性。

9.（15 分）设A,B,C,D均为 4 阶非零矩阵，其中B,C都是可逆矩阵，且$ABCD=0$。$R(X)$表示矩阵X的秩。

（1）证明：$10\le R(A)+R(B)+R(C)+R(D)\le 12$；

（2）试给出满足$R(A)+R(B)+R(C)+R(D)=10$的一组 4 阶非零矩阵A,B,C,D，并加以说明。

10.（15 分）设$S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\ (k=0,1,2,3,\cdots)$，证明：

（1）$n=3$时，行列式$D_3=\begin{vmatrix}S_0&S_1&S_2\\S_1&S_2&S_3\\S_2&S_3&S_4\end{vmatrix}=\prod\limits_{1\le i<j\le 3}(x_j-x_i)^2$；

（2）$n+1$阶行列式$D_{n+1}=\begin{vmatrix}S_0&S_1&\cdots&S_{n-1}&1\\S_1&S_2&\cdots&S_n&x\\S_2&S_3&\cdots&S_{n+1}&x^2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\S_n&S_{n+1}&\cdots&S_{2n-1}&x^n\end{vmatrix}=\prod\limits_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)^2\cdot\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)$。