

**江苏大学**  
**硕士研究生入学考试样题**

科目代码: 853

**A卷**

科目名称 高等代数

满分: 150分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、(15分) 计算  $n$  阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x & y & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ z & 1+x & y & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & z & 1+x & y & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & z & \ddots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1+x & y \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & z & 1+x \end{vmatrix},$$

其中  $x = yz$ 。

二、(15分) 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{bmatrix}。$$

求  $A$  的所有不变因子, 初等因子和 Jordan 标准形。

三、(20分) 讨论  $a$  和  $b$  为何值时, 方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

有唯一解; 无解; 无穷多个解。当有无穷多个解时, 求出通解。

四、(20分) 证明:  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  (其中  $\beta_1$  不等于零向量) 线性相关的充分必要条件是

是其中至少有一个向量  $\beta_i$  ( $2 \leq i \leq n$ ) 可被  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{i-1}$  线性表出。

五、(20分) 用正交线性替换化下列二次型为标准型:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

六 (20分) 设  $A$  为  $s \times n$  的矩阵,  $B$  为  $n \times m$  的矩阵, 即

$$A = [a_{ij}]_{s \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{n \times m}.$$

证明:

$$\text{秩}(AB) \geq \text{秩}(A) + \text{秩}(B) - n.$$

七、(20分) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是数域  $P$  上  $n$  维线性空间  $V$  的  $n$  个向量, 其秩为  $r$ 。定

义  $W = \{(k_1, k_2, \dots, k_n) \mid k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0\}$ 。证明  $W$  是  $P^n$  的  $n - r$  维子空间。

八 (20分) 令  $V$  表示数域  $P$  上的所有次数小于  $n$  的全体多项式和零多项式构成的向量空间。定义  $V$  上的线性变换  $\phi$ :

$$\phi(f(x)) = xf'(x) - f(x).$$

(1) 求线性变换  $\phi$  的值域  $\phi(V)$  与核  $\phi^{-1}(0)$ ;

(2) 证明:  $V = \phi(V) \oplus \phi^{-1}(0)$ 。