

# 控制受限欠驱动桥吊系统改性终端滑模控制

王 杰, 强宝民, 何祯鑫, 杜文正

(火箭军工程大学 导弹工程学院, 西安 710025)

**摘要:**设计了一种改性终端滑模控制方法,满足了桥吊系统的快速性要求;采用非线性趋近律代替等速趋近律,大幅减弱了系统抖振幅度和频率;根据驱动力矩有限的工业背景,设计自适应辅助系统,实现了有限控制信号输入。仿真结果表明,提出的控制方法在控制受限的情况下能够较终端滑模大幅缩短系统状态收敛时间;控制系统抗扰性测试表明,控制方法对外界干扰有较强的鲁棒性能,验证了控制方法的可行性与有效性。

**关键词:**欠驱动系统;桥吊;控制受限;非线性控制;终端滑模;变结构控制

**本文引用格式:**王杰,强宝民,何祯鑫,等. 控制受限欠驱动桥吊系统改性终端滑模控制[J]. 兵器装备工程学报, 2019,40(10):221-228.

**Citation format:** WANG Jie, QIANG Baomin, HE Zhenxin, et al. Improved Terminal Sliding Mode Control Based on Input Limitations for Underactuated Overhead Crane Systems[J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2019, 40(10): 221-228.

中图分类号: TP273.5

文献标识码: A

文章编号: 2096-2304(2019)10-0221-08

## Improved Terminal Sliding Mode Control Based on Input Limitations for Underactuated Overhead Crane Systems

WANG Jie, QIANG Baomin, HE Zhenxin, DU Wenzheng

(School of Missile Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

**Abstract:** This paper proposed an improved terminal sliding mode control to satisfy the rapid requirements of the overhead crane system. The nonlinear approach method was used instead of the ordinary approach law, which greatly reduces the chattering amplitude and frequency of the system. Aiming at the industrial background of limited driving torque, an adaptive system was designed to achieve limited control signals. The simulation results show that the proposed control method can significantly shorten the system state convergence time when the control input was limited. The anti-interference test of the control system shows that the control method has strong robust performance to external disturbances, which verified the feasibility and effectiveness of the control method.

**Key words:** under-actuated system; overhead crane; control limited; nonlinear control; terminal sliding mode; variable structure control

桥吊作为一种常见的欠驱动设备,在工业生产中有广泛的应用。直观地讲,所谓欠驱动系统,是指系统的控制输入变量个数小于系统自由度的一类非线性系统,在生产实践中

很多设备都具有欠驱动的形式,由于去掉系统部分驱动器,增加了系统自由度,提高了系统灵活性,使得欠驱动系统在节约能源、降低价格、增强系统适应性等方面都比全驱动系

收稿日期: 2019-01-24; 修回日期: 2019-02-19

基金项目: 陕西省高校青年人才托举计划(20170512)

作者简介: 王杰(1994—),男,硕士研究生,主要从事起重机消摆控制研究, E-mail: ldyishizhu@gmail.com。

通讯作者: 强宝民(1964—),男,教授,硕士生导师,主要从事武器装备故障诊断研究, E-mail: 18813122146@163.com。

统优越。在桥吊系统中,由于非直接控制的摆动自由度的存在,使得其动力学特性与耦合性相比全驱动系统更为复杂,给系统的稳定控制带来了难度。因此对欠驱动非线性桥吊系统的防摆研究,不论对于控制理论的完善,还是实际工业生产都有极为重要的意义。

近年来,国内外学者针对桥吊系统的控制问题开展了很多研究工作,主要控制模式分为开环和闭环控制。具体而言,主要控制方法有输入整形<sup>[1]</sup>、LQR<sup>[2]</sup>、PID<sup>[3]</sup>、部分反馈线性化<sup>[4]</sup>、最优控制<sup>[5]</sup>、能量方法<sup>[6]</sup>、分级控制<sup>[7]</sup>以及智能控制<sup>[8]</sup>等等。这些控制方法在理想条件下均能够取得很好的控制效果,但是在工业生产中,由于大量的外界扰动、参数摄动以及风载荷、摩擦力的存在,采用传统的控制方法无法保证系统的稳定性以及对干扰的鲁棒性,滑模控制隶属于变结构控制(Variable Structure Control, VSC),本质上是一种特殊的非线性控制,其非线性表现在控制的高频切换性(即抖振)。滑模控制与其他控制方法最大的区别在于其系统结构具有时变的特点,处于动态过程的系统结构,根据当前的系统状态(如误差,误差变化率等)有目的地进行变化,迫使系统按照设计的“滑动模态”状态轨迹运动。由于滑动模态可以根据控制目的进行设计且与对象参数以及外界扰动无关,使得滑模控制在系统稳定性、对干扰的鲁棒性、无需在线辨识以及快速动态响应等方面有独特的优势,广泛应用于非线性系统以及不确定系统的控制研究。在桥吊控制领域,相比传统的控制方法,滑模变结构控制能够满足桥吊系统准确定位、快速消摆的控制要求,特别在有强干扰、强风载存在的环境下,能够保持良好的控制品质。

与传统线性滑模(Line Sliding Mode, LSM)不同,终端滑模(Terminal Sliding Mode, TSM)以其动态响应快、有限时间收敛、稳态跟踪精度高等优点,得到了科研人员的广泛关注。终端滑模通过吸引子函数构造非线性滑模面,能够使得系统状态在有限时间内达到平衡状态,但在系统状态远离平衡点时,状态收敛速度会远低于线性滑模,为了解决这一问题,在文献[9]中Keleher通过优化吸引子函数提出了快速终端滑模(Fast Terminal Sliding Mode, FTSM)控制,实现了系统状态快速、准确收敛到平衡状态。

在运动控制领域,执行器往往会发生饱和现象,如船舶的偏航摆舵系统,舵机的最大偏角限制等。这使得过大的控制律难以实现,该问题在某种程度上会影响系统的控制稳定性,甚至会引起系统失稳。作者通过定义自适应辅助分析系统,采用输入饱和和误差动态放大的方法,实现了一种基于控制输入抗饱和的滑模控制方法,解决了桥吊系统的控制受限问题。

基于以上分析,本文针对桥吊系统的控制受限问题,设计了一种控制受限改性终端滑模控制(Control Limited Improved Terminal Sliding Mode, CLITSM)方法,其设计过程分为4个部分:1)通过综合TSM与FTSM终端吸引子的优点,设计了一种改性终端滑模控制,实现了系统状态较快速终端滑模有更快的收敛速度;2)针对执行器的饱和现象,在系统输

入端添加稳定的自适应抗饱和补偿器,实现了控制输入限幅;3)采用分层滑模控制,分别针对位移子系统和摆角子系统设计第一层改性终端滑模面,保证子系统有限时间收敛,之后线性组合为第二层滑模面。通过Lyapunov法分别求取等效控制量和切换控制量,并进行稳定性分析;4)在文献[10]的基础上设计了一种非线性趋近律,应用于桥吊系统的防摆控制,大幅削弱了控制抖振问题。将本文的方法应用于桥吊系统控制,仿真结果表明,桥吊系统能够在输入受限情况下实现系统状态快速收敛,对外界干扰具有强鲁棒性能。

## 1 问题描述

对于常见的二维定绳长桥吊系统,定义 $M, m$ 分别为台车和负载的质量, $l$ 为吊绳长度, $u(t)$ 为控制输入, $x$ 为台车相对原点的位移, $\theta$ 为负载相对铅垂方向的偏角, $f_f$ 为轨道摩擦力,采用欧拉-拉格朗日方法建模如下:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = u(t) - f_f(t) \quad (1)$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\dot{x}\cos\theta + mgl\sin\theta = 0 \quad (2)$$

定义系统状态误差向量 $\underline{e} = [e_1, e_2, e_3, e_4]^T$ ,  $e_i = x_i - x_{di}$ ,  $x_{di}$ 为控制目标,  $i = 1, 2, 3, 4$ 。将式(1),式(2)转换为欠驱动系统的一般形式:

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) = f_1(\underline{x}, t) + g_1(e_3, t)u(t) \\ \dot{e}_3(t) = e_4(t) \\ \dot{e}_4(t) = f_2(\underline{x}, t) + g_2(e_3, t)u(t) \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\underline{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ 为系统状态向量,分别代表台车位置、速度、负载偏角以及角速度, $u(t)$ 为控制输入, $f_1, f_2, g_1, g_2$ 为状态向量的非线性函数,表示为:

$$\begin{cases} f_1(\underline{x}, t) = (mle_4^2\sin e_3 + mgsine_3\cos e_3 - \mu e_2)/(M + m\sin^2 e_3) \\ g_1(e_3, t) = 1/(M + m\sin^2 e_3) \\ f_2(\underline{x}, t) = -[(M + m)gsine_3 + mle_4^2\sin e_3\cos e_3 - \mu e_2\cos e_3]/(M + m\sin^2 e_3)l \\ g_2(e_3, t) = -\cos e_3/(M + m\sin^2 e_3)l \end{cases} \quad (4)$$

对于桥吊系统而言,控制器的控制目标进而可以明确为:

存在有限时间 $t_r$ ,使得任意 $t \geq t_r$ 均满足

$$\lim_{t \geq t_r} e_i = \Theta, \Theta \in [0^-, 0^+] \quad (5)$$

## 2 改性终端滑模收敛性分析

采用分层滑模控制方法,将欠驱动桥吊系统分为两个带干扰二阶非线性子系统A和B:

$$A: \begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) = f_1(\underline{x}, t) + g_1(e_1, t)u(t) \end{cases} \quad (6)$$

$$B: \begin{cases} \dot{e}_3(t) = e_4(t) \\ \dot{e}_4(t) = f_2(\underline{x}, t) + g_2(e_3, t)u(t) \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $\underline{x} = [x_1, x_2]^T$  为系统状态向量,  $\underline{e} = [e_1, e_2]^T$  为系统状态误差向量,  $u(t)$  为控制输入。

考虑 LSM、TSM 和 FTSM 的一阶方程形式:

$$\begin{aligned} S_{\text{LSM}} &= \dot{e} + e = 0 \\ S_{\text{TSM}} &= \dot{e} + e^{p/q} = 0 \\ S_{\text{FTSM}} &= \dot{e} + e + e^{p/q} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $p < q < 2q$ ,  $p, q$  为正奇数。

当系统状态在有限时间内达到平衡状态时, (8) 所示滑模面终端子函数为:

$$\begin{aligned} \text{LSM: } \dot{e} &= -e \\ \text{TSM: } \dot{e} &= -e^{p/q} \\ \text{FTSM: } \dot{e} &= -e - e^{p/q} \end{aligned} \quad (9)$$

由式(9)可见, 终端滑模较线性滑模有更快的收敛速度, 快速终端滑模控制方法在当系统状态接近平衡点时终端子函数主要由  $e$  决定, 较终端滑模改善并提高了系统误差接近零点时的收敛速度。通过优化快速终端滑模终端子函数构成, 并提高桥吊两子系统的耦合性, 本文设计了一种新型改性终端滑模控制(Improved Terminal Sliding Mode, ITSM):

$$\begin{aligned} \text{A: } S_{\text{ITSM}} &= \dot{e}_1 + \gamma_1(e_1^{p/q} + e_1^\tau) - \lambda_1 e_3 \\ \text{B: } S_{\text{ITSM}} &= \dot{e}_3 + \gamma_2(e_3^{p/q} + e_3^\tau) + \lambda_2 e_1 \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\gamma, \lambda$  为正实数,  $\tau > 1$ 。

利用文献[11]引理, 推导 ITSM 有限时间收敛性:

**引理 1:** 如果连续函数  $V$  是正定的且满足如下条件:

$$\dot{V} \leq -\Delta V^\chi, \quad \forall t \geq t_0, \quad V(t_0) \geq 0 \quad (11)$$

其中  $\Delta$  为正系数,  $0 < \chi < 1$ 。则函数  $V$  能在任意给定  $t_0$  到达原点, 且收敛时间满足:

$$t_R \leq t_0 + V^{1-\chi}(t_0)/\Delta(1-\chi) \quad (12)$$

**引理 2:** 针对桥吊系统改性终端滑模控制, 终端吸引子满足:

$$\begin{aligned} \text{A: } \dot{e}_1 &= -\gamma_1(e_1^{p/q} + e_1^\tau) + \lambda_1 e_3 \\ \text{B: } \dot{e}_3 &= -\gamma_2(e_3^{p/q} + e_3^\tau) - \lambda_2 e_1 \end{aligned} \quad (13)$$

为方便运算, 不妨选取  $V = (e_1^2 + e_2^2)/2$ , 系数  $\gamma = \lambda = 1$ , Lyapunov 函数满足引理 1 的条件, 因此进而由引理 1 可以得到欠驱动桥吊系统滑模状态的收敛时间为  $t_s \leq t_0 + 2V(t_0)^{\frac{(1-p/q)}{2}}/(1-p/q)$ , 对于收敛的总理论时间将会在稳定性分析部分证明。

### 3 改性终端滑模控制器设计

分层滑模控制流程简图如图 1, 通过事先设定控制目标利用双层滑模对位移、摆角子系统以及总滑模面进行稳定控制。

根据式(10)所示滑模面, 利用等效控制求取等效控制量:

$$u_{eq1} = -g_1^{-1}(f_1 + (\gamma_1 p/q)e_1^{p/q-1}e_2 + \gamma_1 \tau e_1^{\tau-1} - \lambda_1 e_4) \quad (14)$$

$$u_{eq2} = -g_2^{-1}(f_2 + (\gamma_2 p/q)e_3^{p/q-1}e_4 + \gamma_2 \tau e_3^{\tau-1} + \lambda_2 e_2) \quad (15)$$

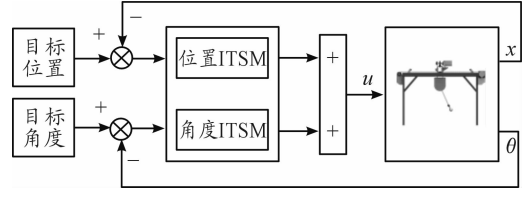


图 1 分层 ITSM 控制流程简图

为了保证包含两个子系统的总系统稳定, 需要设计构造第二层滑模面:

$$S = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 \quad (16)$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2$  为严格正实数。为保证子系统能够到达第一层滑模面, 利用 Lyapunov 函数和准滑动模态设计方法设计系统总输入为:

$$u = u_{eq1} + u_{eq2} + u_{sw} \quad (17)$$

为了获得整个系统的控制输入量, 需要确定切换控制部分。对基于分层滑模控制方法的变结构控制器而言, 系统第二级滑动面的稳定性保证了变结构控制系统的整体稳定性, 因此切换控制量的选取应使如下所示的滑模到达条件成立:

$$S \cdot \dot{S} < 0 \quad (18)$$

采用等速趋近律求解滑模控制器的切换控制量:

$$\dot{S} = -\kappa \text{sgn}(S) \quad (19)$$

其中,  $\kappa$  为严格正实数, 且  $\kappa = l + \psi, \psi > 0$ 。

由式(14) - 式(19)可得改性终端滑模控制器切换控制量:

$$u_{sw} = -\frac{\alpha_1 g_1 u_{eq2} + \alpha_2 g_2 u_{eq1} + \kappa \text{sgn}(S)}{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2} \quad (20)$$

则采用等速趋近律的桥吊系统控制输入为:

$$u = u_{eq1} + u_{eq2} + u_{sw} = \frac{\alpha_1 g_1 u_{eq1} + \alpha_2 g_2 u_{eq2}}{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2} - \frac{\kappa \text{sgn}(S)}{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2} \quad (21)$$

由式(20)所示, 整个起重机系统的控制输入量中含有符号函数这一不连续项, 该不连续项的存在将导致变结构系统出现高频抖振现象, 且系统的抖振程度取决于系统参数的大小。为获得较短的稳定时间和鲁棒性, 需要选择较大的控制器增益, 这会导致系统的大幅高频抖振, 为解决系统抖振与控制效益的矛盾, 本文在文献[10]的基础上提出了式(22)所示非线性趋近律:

$$\dot{S} = -\frac{\kappa \text{sgn}(S)}{\mu + (1-\mu) \exp(-\delta |S|^\omega)} - kS \quad (22)$$

其中,  $k, \kappa$  为正实数,  $\mu$  为介于  $[0, 1]$  区间的正实数,  $\delta$  为正实数,  $\omega$  为正整数。同理求得采用非线性趋近律的系统控制量:

$$\begin{aligned} u' &= u_{eq1} + u_{eq2} + u'_{sw} = \\ &= \frac{\alpha_1 g_1 u_{eq1} + \alpha_2 g_2 u_{eq2}}{\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2} + u'_{sw} \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$u'_{sw} = \frac{-\kappa \operatorname{sgn}(S)}{\mu + (1-\mu)\exp(-\delta|S|^\omega)} - kS \quad (24)$$

#### 4 输入受限改性终端滑模控制器设计

假定被控对象为式(6)所示的子系统 A,取最大输入值  $u_{\max}, u_{\max} > 0, \Delta u = u - v, u = \operatorname{sat}(v)$ , 则此时饱和和控制输入表示为:

$$u = \operatorname{sat}(v) = \begin{cases} u_{\max}, & v > u_{\max} \\ v, & |v| \leq u_{\max} \\ -u_{\max}, & v < -u_{\max} \end{cases} \quad (25)$$

通过定义辅助分析系统,采用饱和和误差动态放大的方法,可实现一种基于控制输入饱和的滑模控制,闭环系统示意图如图 2。

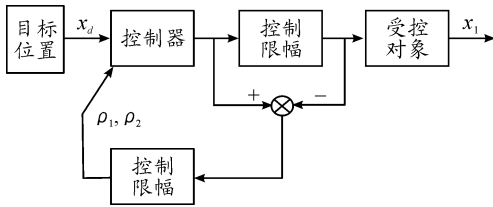


图 2 控制受限闭环控制系统示意图

通过设计稳定的自适应辅助系统,实现控制饱和的补偿<sup>[12]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = -c_1\rho_1 + \rho_2 \\ \dot{\rho}_2 = -c_2\rho_2 + b\Delta u \end{cases} \quad (26)$$

写成矩阵形式:

$$\dot{\rho} = \mathbf{A}\rho + \bar{\mathbf{B}}\Delta u \quad (27)$$

其中,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 \\ 0 & -c_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ 。为保证辅助参数  $t \rightarrow \infty$

时,  $\rho \rightarrow 0$ , 需要保证系统矩阵  $\mathbf{A}$  为 Hurwitz, 即需要满足  $c_1, c_2 > 0$ 。同理进行子系统 B 的设计, 为方便计算, 取子系统 B 与 A 相同的参数。

重新定义误差函数:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= x_1 - x_{1d} - \rho_1 \\ e_3(t) &= x_3 - x_{3d} - \rho_1 \end{aligned} \quad (28)$$

则有:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= x_2 - \dot{x}_{1d} - (-c_1\rho_1 + \rho_2) \\ \dot{e}_3(t) &= x_4 - \dot{x}_{3d} - (-c_1\rho_1 + \rho_2) \end{aligned} \quad (29)$$

将式(28), 式(29)代入改性终端滑模控制式(10)并求导得:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1^{\lim} &= \dot{e}_2 - \dot{\rho}_1 + \gamma_1(e_1^{(p/q)-1}\dot{e}_1 + \tau e_1^{\tau-1}\dot{e}_1) - \lambda_1\dot{e}_3 \\ \dot{S}_2^{\lim} &= \dot{e}_4 - \dot{\rho}_1 + \gamma_2(e_3^{(p/q)-1}\dot{e}_3 + \tau e_3^{\tau-1}\dot{e}_3) + \lambda_2\dot{e}_1 \end{aligned} \quad (30)$$

令  $\dot{S}_1^{\lim}, \dot{S}_2^{\lim} = 0$  得子系统 A, B 的输入受限等效控制量:

$$u_{eq1}^{\lim} = u - \Delta u = -g_1^{-1}[f_1 - c_1^2\rho_1 + (c_1 + c_2)\rho_2 +$$

$$(\gamma_1 p/q)e_1^{(p/q)-1}\dot{e}_1 + \tau e_1^{\tau-1}\dot{e}_1 - \lambda_1\dot{e}_3] \quad (31)$$

$$\begin{aligned} u_{eq2}^{\lim} &= u - \Delta u = -g_2^{-1}[f_2 - c_1^2\rho_1 + (c_1 + c_2)\rho_2 + \\ &(\gamma_2 p/q)e_3^{(p/q)-1}\dot{e}_3 + \tau e_3^{\tau-1}\dot{e}_3 + \lambda_2\dot{e}_1] \end{aligned} \quad (32)$$

采用(24)所示切换控制量, 得到输入受限改性终端滑模控制律:

$$u_{CLITSM} = u'_{eq1} + u'_{eq2} + u'_{sw} \quad (33)$$

#### 5 系统稳定性分析

稳定性定理一: 对于二维定绳长桥吊系统, 若采用式(10)所示设计子系统滑模面, 式(16)所示总滑模面, 并采用式(33)所示总滑模控制量, 则整个桥式起重机系统的滑模面 S 是渐进稳定的。

证明: 构造 Lyapunov 能量函数

$$V(t) = \frac{1}{2}S^2 \quad (34)$$

对其求导后有  $\dot{V}(t) = S\dot{S}$ , 将式(22)所示非线性趋近律代入有:

$$\dot{V}(t) = S\dot{S} = -\frac{\kappa|S|}{Q(S)} - kS^2 \leq 0 \quad (35)$$

其中  $Q(S) = \mu + (1-\mu)\exp(-\delta|S|^\omega) > 0$ , 进而可得:

$$\kappa < \kappa/Q(S) < \kappa/p \quad (36)$$

由式(35), 式(36)可得

$$\dot{V}(t) = S\dot{S} = -\kappa|S| - kS^2 \leq 0 \quad (37)$$

对式(37)进行积分运算, 进一步有

$$V(t) \Big|_0^t \leq \int_0^t (-\kappa|S| - kS^2) d\theta \quad (38)$$

进而

$$V(t) = \frac{1}{2}S^2 \leq V(0) \leq \infty \quad (39)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (\kappa|S| + kS^2) d\theta \leq V(0) - V(t) \leq V(0) < \infty \quad (40)$$

根据巴尔巴拉引理推论, 由式(37), 式(39)可知  $\{S, \dot{S}\} \in L_\infty$ , 由式(40)可知  $S \in L_2$ , 得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} S = 0$ , 即系统总滑模面为渐进稳定。

稳定性定理二: 对于二维定绳长桥吊系统, 若采用式(10)所示设计子系统滑模面, 式(16)所示总滑模面, 并采用式(33)所示总滑模控制量, 则各子滑模面 S 也渐进稳定。

证明: 由式(38)得到:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |S| d\theta < \infty \quad (41)$$

即总滑模面为绝对可积, 构造两个滑模面:

$$\begin{cases} S_1 = \alpha_1 s_1 + \beta s_2 \\ S_2 = \alpha_2 s_1 + \beta s_2 \end{cases} \quad (42)$$

假定  $\alpha_1, \alpha_2$  为任意不相等正实数, 故  $S_1 \neq S_2$ , 不妨令  $S_1^2 > S_2^2$ , 由式(41)可知

$$0 \leq \int_0^\infty S_1^2 d\theta < \infty, 0 \leq \int_0^\infty S_2^2 d\theta < \infty \quad (43)$$

进而有

$$\begin{aligned} \infty &> \int_0^{\infty} (S_1^2 - S_2^2) d\theta = \\ &\int_0^{\infty} ((\alpha_1^2 - \alpha_2^2)s_1 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)\beta s_1 s_2) d\theta = \\ &\int_0^{\infty} (-(\alpha_1 - \alpha_2)^2 s_1^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)s_1 S_1) d\theta > 0 \quad (44) \end{aligned}$$

由式(40),式(43)可知

$$\int_0^{\infty} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 s_1^2 \leq 2|\alpha_1 - \alpha_2| \int_0^{\infty} |s_1| |S_1| d\theta < \infty \quad (45)$$

从而得出:

$$\int_0^{\infty} s_1^2 d\theta < \infty \quad (46)$$

假设  $\{s_2, \dot{S}_2\} \in L_{\infty}$ , 由定理二  $\{S, \dot{S}\} \in L_{\infty}$  可以得到  $\{s_1, \dot{S}_1\} \in L_{\infty}$ , 根据巴尔巴拉引理, 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} s_1 = 0$ , 满足假设条件。同理可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} s_2 = 0$ , 即第一层滑模面也是渐进稳定的。

有限时间收敛定理: 对于表示二维定绳长桥吊系统模型的式(3), 若采用式(10)所示设计子系统滑模面, 采用式(14), 式(15)所示等效控制量, 则系统能够在有限时间内收敛到达滑模状态。

**证明:** 为了计算简便, 以下证明过程中趋近律均采用式(19)等速趋近律, 对于式(22)非线性趋近律证明类似, 此处不多赘述。

由式(37)得到式(3)描述的欠驱动桥吊系统满足滑模到达条件, 即滑模面  $S$  是渐进稳定的, 因此式(3)满足式(13)终端滑模子函数条件, 即式(3)欠驱动系统可转化为式(13)所示简化系统处理。

根据系统状态与分层滑模控制曲面的关系将收敛过程划分为两阶段, 即到达阶段和滑动阶段, 根据引理 2, 计算总收敛时间为:

$$t_{\text{total}} = t_0 + \frac{\sqrt{2V(t_0)}}{\min(\psi_1, \psi_2)} + \frac{(2\hat{V}(t_r))^{\frac{1-p/q}{2}}}{1-p/q} < \infty \quad (47)$$

其中  $\hat{V} = (e_1^2 + e_2^2)/2$ , 其余参数如前定义。

## 6 仿真分析

为了进一步分析本文提出控制方法的有效性与可行性, 本文采用 Matlab/Simulink 进行数值仿真试验验证。桥吊系统动力学模型基本参数值见表 1, 仿真实验分为 3 个部分。① 采用 CLITSM 控制方法进行系统仿真分析, 检验控制效果; ② 分别采用 LSM、TSM、ITSM 以及 PID 控制方法, 对比验证本文提出的控制受限改性终端滑模控制方法的有效性、优越性以及存在的问题; ③ 在原有系统中加入不同形式的随机干扰以模拟工业生产中可能会出现的风阻和啃轨运行阻力, 检验控制系统的鲁棒性; ④ 对 LSM、TSM、ITSM 和 CLITSM 滑模面进行对比, 检验本文设计的控制受限改性终端滑模控制方法收敛速度的快速性。

设定系统控制目标为  $\underline{x} = [2, 0, 0, 0]^T$ , 即:  $\underline{e} = [0, 0, 0, 0]^T$ , 通过 Simulink 饱和和函数模块设定输入受限控制器范围为  $[-5, 5]$ , 采用表 1 所示控制参数和模型参数, 仿真得到输入受限改性终端滑模控制系统状态响应曲线如图 3, 系统分层滑模面曲线如图 4。

表 1 桥吊系统基本参数值

参数	单位	值
$p/q$	/	3/5
$\tau$	/	3
$\gamma_1/\gamma_2$	/	1/3
$\lambda_1/\lambda_2$	/	1/1
$k/\kappa$	/	4/1
$c_1/c_2/c_3/c_4/b$	/	3/3/3/3/6
$\mu/\delta/\omega$	/	0.1/10/1
$m/M$	kg/kg	0.8/1
$l/g$	m/ms <sup>-2</sup>	0.305/9.8

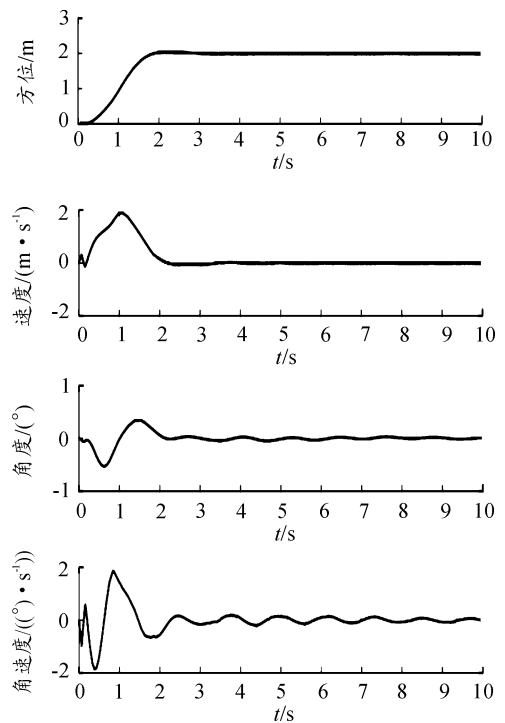


图 3 系统动态响应曲线

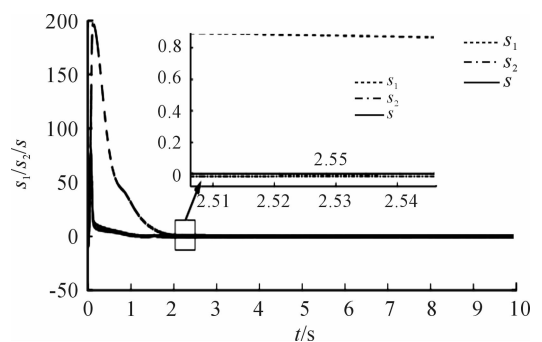


图 4 分层滑模面曲线

从仿真结果看,桥吊系统在输入受限的情况下能够在 2.1S 完成负载转运,系统摆角在 2.93S 达到  $\theta \in [-5^\circ, 5^\circ]$  误差允许范围。对比相关文献,本文所提出的输入受限终端滑模控制能够满足欠驱动桥吊系统精确定位、快速消摆的控制目标。

桥吊控制系统在输入不受限、受限并采用等速趋近律、以及受限并采用非线性趋近律 3 种情况的控制输入,仿真结果如图 5 所示。在没有输入受限的系统中,如图 5(a),控制输入处于  $[-10, 50]$  区间,无法满足工程中控制信号幅值有限的现实状况;采用等速趋近律的输入受限控制器能够降低对控制信号强度的要求,但系统状态在滑模面两侧高频切换会产生抖振如图 5(b) 所示;为此在文献[10]的基础上,改进得到了非线性趋近律,能够有效降低抖振现象,此时系统的控制输入仿真结果如图 5(c) 所示。

为了进一步验证提出的控制方法的有效性,本文采用 PID,线性滑模(LSM),终端滑模(TSM),改性终端滑模(ITSM)作为对比控制方法,采用表 2,表 4 控制器参数,表 3 趋近律。

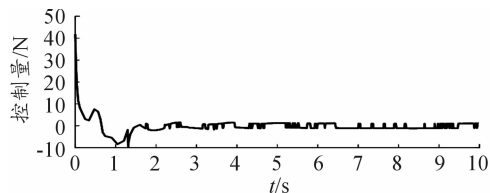
仿真得到系统动态响应图如图 6,状态相图如图 7。

表 2 PID 控制器参数

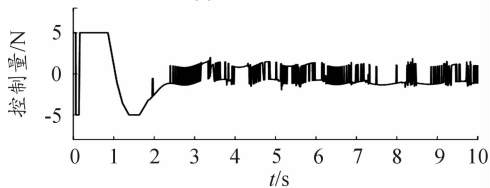
参数	P	I	D
位置 PID	4	0.01	0.1
摆角 PID	20	70.5	2

表 3 等速趋近律与非线性趋近律参数

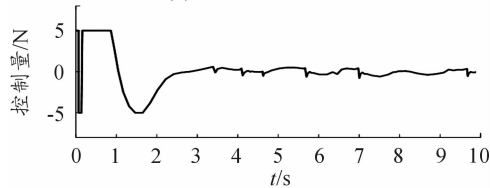
趋近律	$\kappa$	$k$	$\mu$	$\delta$	$\bar{\omega}$
非线性	0.21	3	0.1	10	1
等速	3.5	/	/	/	/



(a) 输入不受限

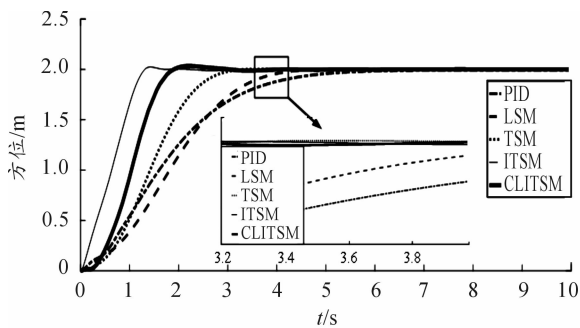


(b) 等速趋近律输入

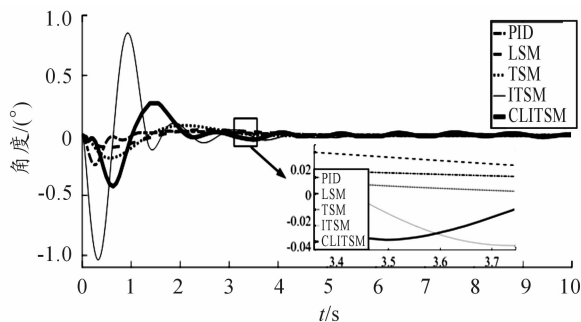


(c) 非线性趋近律输入

图 5 系统控制量图

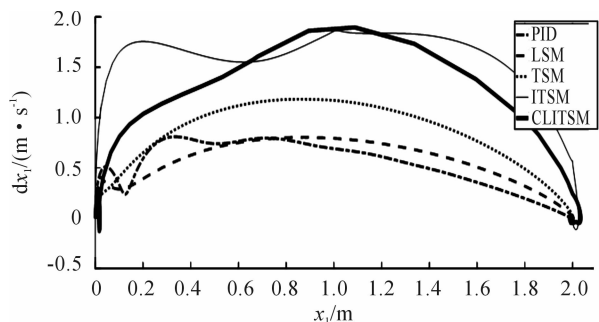


(a) 台车位置

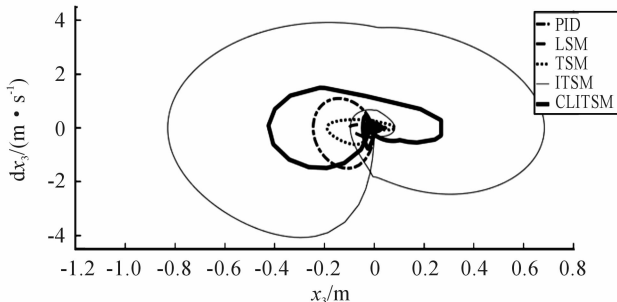


(b) 负载摆角

图 6 系统动态响应图



(a) 台车位置-速度状态相图



(b) 负载摆角-角速度状态相图

图 7 系统状态相图

通过图 6(a) 看出本文提出的改性终端滑模控制 (ITSM), 有最短的位置响应时间, 在输入受限情况下, 系统位置响应时间有所延长, 但远小于终端滑模控制 (TSM) 的响应时间; 系统摆角控制如图 6(b) 所示, ITSM 由于位置响应快, 造成了大幅度负载摆动, 本文提出的 CLITSM 控制方法改善了摆角响应; 在相图 7(a) 中分析得到, 在负载刚开始移动和结束移动的情况下, CLITSM 控制方法有更大的加速度, 能够达到快速定位的要求, LSM, TSM 有稍长的响应时间, 但运动更为平稳; 在相图 7(b) 中由于快速的位置响应造成了大幅摆动, 这也在图 6(b) 有所体现。

表 4 自适应与滑模控制器参数

参数	LSM	TSM	ITSM	CLITSM
$c_1$	0.55	/	/	/
$c_2$	4.9	/	/	/
$\alpha_1$	3.5	2.5	1	1
$\alpha_2$	3.7	3.6	0.02	0.02
$p_1/q_1$	/	41/45	3/5	3/5
$p_2/q_2$	/	107/109	3/5	3/5
$\beta_1$	/	6.67	/	/
$\beta_2$	/	3.57	/	/
$\gamma_1$	/	/	1	1
$\gamma_2$	/	/	3	3
$\lambda_1$	/	/	1	1
$\lambda_2$	/	/	1	1
$C_1$	/	/	/	3
$C_2$	/	/	/	3
$C_3$	/	/	/	3
$C_4$	/	/	/	3

各滑模控制方法的总滑模面图如图 8, 能够看出 ITSM, CLITSM 在 1 s 左右达到滑模状态, 相比其他滑模面趋近时间过长, 但滑模面最接近于零点, 因此系统状态更稳定。

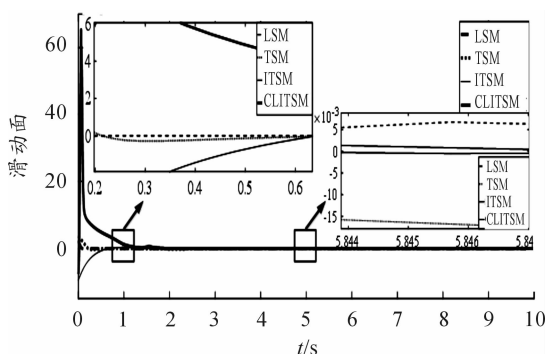


图 8 各控制方法的总滑模面图

为了检验控制系统对干扰的鲁棒性, 本文采用高斯噪声对系统状态进行干扰, 为尽可能模拟桥吊系统的实际运行状况, 在 1 s 和 6 s 分别设置干扰信号如下:

$$dt_1 = A_1 \exp\left[-\frac{(t - c_{i1})^2}{2b_{i1}^2}\right] \quad (48)$$

$$dt_2 = A_2 \exp\left[-\frac{(t - c_{i2})^2}{2b_{i2}^2}\right] \quad (49)$$

仿真试验取噪声信号幅值  $A_1 = 2, A_2 = 3$  参数  $c_{i1} = 1, c_{i2} = 6b_{i1} = b_{i2} = 0.3$ , 得到系统控制输入和状态响应如图 6 所示, 滑模面函数如图 8 所示。

从图 9 仿真结果可以看出, 基于 CLITSM 滑模控制方法对外界干扰和系统不确定性具有很强好的控制品质, 能够快速消除外界干扰和系统不确定性的影响, 受扰后能够快速进入滑模状态, 因此具有较强的鲁棒性能。

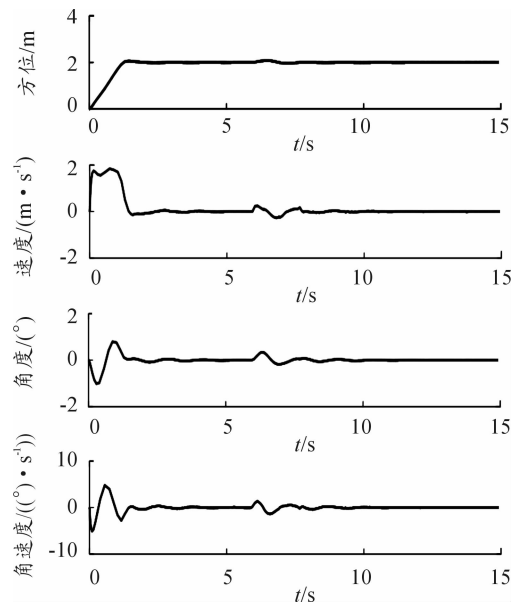


图 9 干扰下系统状态响应

## 7 结论

- 1) 提出了一种改性终端滑模控制, 能够大幅缩短系统状态达到平衡点的收敛时间;
- 2) 针对工程中控制信号有限的现实状况, 采用自适应动态误差放大器, 实现了系统输入受限的要求;
- 3) 针对滑模控制的高频抖振问题, 采用非线性趋近律动态调节切换增益, 大幅削弱了抖振幅度与幅值;
- 4) 系统鲁棒性分析测试得到桥吊系统在快速消摆和准确定位控制目的的同时, 不论系统是否进入滑模状态, 其对外界干扰都具有极强的抗扰性能。

## 参考文献:

- [1] MAGHSOUDI M, MOHAMED Z, HUSAIN A, et al. An opti-

- mal performance control scheme for a 3D crane [J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2016, 66 - 67: 756 - 768.
- [2] KIM D, PARK Y, PARK Y S, et al. Dual stage trolley control system for anti-swing control of Mobile Harbor crane [C]//International Conference on Control, Automation and Systems. IEEE, 2011: 420 - 423.
- [3] PANUNCIO F, YU W, LI X. Stable neural PID anti-swing control for an overhead crane [J]. Intelligent Automation & Soft Computing, 2014, 20(2): 145 - 158.
- [4] SPONG M W, PRALY L. Control of underactuated mechanical systems using switching and saturation [J]. Control using logic-based switching, 1997, 162: 162 - 172.
- [5] KHATAMIANFAR A, SAVKIN A V. A new tracking control approach for 3D overhead crane systems using model predictive control [C]//Control Conference. IEEE, 2014: 796 - 801.
- [6] 孙宁. 欠驱动吊车轨迹规划与非线性控制策略设计、分析及应用 [D]. 天津: 南开大学, 2014.
- [7] NING S, FANG Y, MA B. Motion planning for overhead cranes based on iterative strategy [C]//Control Conference. IEEE, 2010: 326 - 331.
- [8] LEE L H, HUANG P H, SHIH Y C, et al. Parallel neural network combined with sliding mode control in overhead crane control system [J]. Journal of Vibration & Control, 2012, 20(5): 749 - 760.
- [9] KELEHER P G, STONIER R J. Adaptive terminal sliding mode control of a rigid robotic manipulator with uncertain dynamics incorporating constraint inequalities [J]. Anziam Journal, 2002, 43.
- [10] FALLAHA C J, SAAD M, KANAAN H Y, et al. Sliding-Mode Robot Control With Exponential Reaching Law [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2011, 58(2): 600 - 610.
- [11] MOULAY E, PERRUQUETTI W. Finite time stability and stabilization of a class of continuous systems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 323(2): 1430 - 1443.
- [12] 刘金琨. 先进 PID 控制 MATLAB 仿真 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2004.

(责任编辑 周江川)

(上接第 215 页)

- [2] 刘建伟, 周娅. 高压输电线路除冰技术综述 [J]. 机械设计与制造, 2012(5): 285 - 287.
- [3] 谢东升, 宋巍. 高压输电线路覆冰清除爆破参数研究 [J]. 中北大学学报(自然科学版), 2018, 39(06): 746 - 751.
- [4] 陈勇, 胡伟. 覆冰导线脱冰跳跃特性研究 [J]. 中国电机工程学报, 2009, 29(28): 115 - 121.
- [5] 俞凯, 王玲君. 覆冰导线均匀和非均匀脱冰跳跃数值模拟研究 [J]. 通信电源技术, 2018(1): 78 - 80.
- [6] 吴天宝, 胡中原. 输电线路脱冰跳跃动态模型研究 [J]. 应用力学学报, 2018(1): 134 - 140.
- [7] 鲁元兵, 楼文娟. 输电导线不均匀脱冰的全过程模拟分析 [J]. 振动与冲击, 2010, 29(9): 47 - 50.
- [8] JI Kunpeng, RUI Xiaoming, LI Lin, et al. A novel ice-shedding model for overhead power line conductors with the consideration of adhesive/cohesive forces [J]. Computers & Structures, 2015, 157(12): 153 - 164.
- [9] KOLLAR L E, FARZANEH M. Modeling Sudden Ice Shedding From Conductor Bundles [J]. IEEE Transactions on Power Delivery, 2013, 28(2): 604 - 611.
- [10] 姬昆鹏. 冲击载荷下覆冰架空输电线路动力响应研究 [D]. 北京: 华北电力大学, 2016.
- [11] 鲁元兵. 输电线路覆冰脱落及断线分析 [D]. 杭州: 浙江大学, 2010.
- [12] 贾玉琢, 刘锐鹏. 覆冰输电架空导线初始构形研究 [J]. 水电能源科学, 2011, 29(1): 148 - 150, 178.
- [13] 李士军, 马大为. 动力松弛方法中 Rayleigh 阻尼参数取值分析 [J]. 计算力学学报, 2010, 27(1): 169 - 172.
- [14] GUY FORTIN, JEAN PERRON. Ice Adhesion Models to Predict Shear Stress at Shedding [J]. Journal of Adhesion Science & Technology, 2012, 26(4/5): 523 - 553.
- [15] 唐锐. 输电线路脱冰动态模型建立及其在诱发脱冰中的应用 [D]. 南京: 南京理工大学, 2017.
- [16] 杨风利, 杨靖波. 重覆冰区特高压悬垂型杆塔不平衡张力分析 [J]. 电网技术, 2012, 36(3): 234 - 240.

(责任编辑 唐定国)