东华理工大学 2016 年硕士生入学考试初试试题

科目代码：818；科目名称：《高等代数》；（A 卷）

适用专业（领域）名称：数学

一、解答题：（共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

1.设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$，求 $\sum_{j=1}^{4} A_{2j}$ 与 $\sum_{j=1}^{4} M_{2j}$，其中 M_{ij}, A_{ij} 分别为元素 a_{ij} 的余子式与代数余子式。

2.已知 4 元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的 3 个解向量，其中 $\alpha_1+\alpha_2=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}^T$，$\alpha_2+\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}^T$，试求非齐次线性方程组的通解。

3.设线性变换 σ 的特征多项式与最小多项式分别为：

$$f(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-2)^2(\lambda+3), m(\lambda)=(\lambda+1)^2(\lambda-2)(\lambda+3)$$

（1）求 σ 的所有不变因子；（2）写出 σ 的若当标准形。

二、证明题：（共 4 小题，每小题 15 分，共 60 分）

1.设 $F=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} \mid a,b,c,d\in Q\}$，证明 F 是数域。

2.设 $p(x), f(x)\in Q[x]$，且 $p(x)$ 在 Q 上不可约，证明：如果 $p(x), f(x)$ 在 Q 上有公共根，则 $p(x)\mid f(x)$。

3.设 A,B 为 n 阶方阵，试证明：秩$(AB)=$秩$(B) \Leftrightarrow ABX=0$ 与 $BX=0$ 同解。

4.设矩阵 A,B 合同，A 可逆，试证明：B 可逆，且 A^{-1} 与 B^{-1} 合同。

三、综合题：（共 3 小题，每小题 20 分，共 60 分）

1.求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix}0\\4\\-2\end{pmatrix}$ 的秩、极大无关组，并将其余向量表示成极大无关组的线性组合。

2.设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$\beta_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$，求 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+L(\beta_1,\beta_2)$ 与 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的维数和基。

3.已知二次曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经过正交变换化为椭圆曲面方程 $v^2+4w^2=4$，求 a,b 的值和正交变换。