汕头大学 2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：814

科目名称：高等代数

适用专业：数学

考 生 须 知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

一．（20 分）（1） 设p为素数，证明多项式$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$在有理数域上是不可约多项式．

（2） 设$f(x)=x^5-2x^4+2x^3-4x^2+x-2$，判断$f(x)$是否存在重因式，并求出重因式(如果存在的话)．

二．（15 分）设$A=\begin{pmatrix}1&1&2&3&4\\1&1&3&5&6\\1&0&1&1&3\\2&1&3&4&7\end{pmatrix}$，求可逆矩阵$P$和$Q$使得$PAQ=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}$，其中$r$是$A$的秩，$I_r$表示$r$阶单位矩阵．

三．（20 分）计算下列矩阵的行列式：

（1）$\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\\3&4&5&\cdots&1&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_{n-1}^2&x_n^2\\x_1^3&x_2^3&\cdots&x_{n-1}^3&x_n^3\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_{n-1}^{n-1}&x_n^{n-1}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_{n-1}^n&x_n^n\end{pmatrix}$．

四．（20 分）（1）设a,b是参数，讨论下列方程组的解的情况：

$$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3&=&3,\\x_1+2ax_2+x_3&=&4,\\bx_1+x_2+x_3&=&4.\end{cases}$$

（2）设A,B分别是$m\times n$和$n\times m$矩阵，I_r表示r阶单位矩阵，rank(A)表示A的秩．证明：

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}I_m&A\\B&I_n\end{pmatrix}=m+\operatorname{rank}(I_n-BA).$$

五．（20 分）用$U_n(\mathbb{R})$表示实数域上的n阶上三角矩阵的集合．（1） 验证$U_n(\mathbb{R})$与矩阵的加法和数乘构成一个线性空间并给出该线性空间的一组基；（2） 设有$U_3(\mathbb{R})$的变换$\mathcal{A}$：

$$\mathcal{A}: U_3(\mathbb{R}) \longrightarrow U_3(\mathbb{R}),$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

验证$\mathcal{A}$是线性变换并写出$\mathcal{A}$在某组基(自己选一组基)下的矩阵.

六.(20分)(1)设$a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_{n-1}$都是实数，且$b_i \neq 0, i = 1,2,\ldots,n-1$. 设

$$T_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & b_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$ 证明：T_n有n个互不相同的特征值.

(2) 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，其中a_{ij}都是实数，且$a_{ii} > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1,2,\ldots,n$. 证明：

$\det(A) > 0$（$\det(A)$表示A的行列式）.

七.（15分）(1)设$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$，证明$H_n$是正定矩阵.

(2) 设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，其中a_{ij}都是实数，设对$\mathbb{R}^n$中的任意非零向量$\mathbf{x}$，有$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$. 证明：$A$的每个特征值的实部大于0.

八.（20分）Cayley-Hamilton 定理如下：设A为n阶实数方阵，其特征多项式为$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$，则有
$$A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI_n = O.$$

(1)设A可逆，利用 Cayley-Hamilton 定理推导A的逆阵A^{-1}和伴随矩阵A^*的表达式（用A的多项式表示）.

(2) 证明可逆矩阵A的伴随矩阵A^*可逆，并求A^*的逆阵（用A的多项式表示）.

(3) 设$n \geq 2$，$A^* = A$，求A的行列式.