

汕头大学 2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 803

科目名称: 高等数学基础

适用专业: 教育专业硕士 (学科教学-数学)

考生须知

答案一律写在答题纸上, 答在
试题纸上的不得分! 请用黑色字迹
签字笔作答, 答题要写清题号, 不
必抄原题。

一、计算下列各题 (每小题 8 分, 共 56 分)

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+\sin^2 x} - \sqrt{1-\sin^2 x}}$; 2. 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$;

3. 求反常积分 $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$; 4. 求曲线 $e^{xy} - 2x - y = 3$ 在 $x=0$ 处的切线方程;

5. 求极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\tan(xy)}{y}$; 6. 设 $z = x^3 y^2 - x^2 - e^y$, 求 dz ;

7. 计算二次积分 $\int_0^1 dx \int_x^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy$.

二、解答下列各题 (每小题 9 分, 共 18 分)

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有连续的一阶导数, $x_0 \in (a, b)$ 且 $f''(x_0)$ 存在, 求极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - 2f(x_0)}{t^2}$$

2. 当 x 为何值时, 函数 $I(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ 有极值? 极大还是极小? 极值是多少?

三、(8 分) 求函数 $u(x, y, z) = xy^2z$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 下的极大值, 并证明对任意正数 a, b, c , 成立 $ab^2c \leq \frac{1}{64}(a+b+c)^4$, 其中 $R > 0$.

四、(8 分) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 ($a_n > 0$), 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_n)$ 存在.

五、(10 分) 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 8 \end{vmatrix}$.

六、(20 分) 设 A 为 R^3 上的线性变换, 在自然基 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1) 分别求 A 的像集 $\text{Im}(A)$ 与核 $\text{Ker}(A)$ 的一组基;

2) 在核 $\text{Ker}(A)$ 中选一组基, 把它扩充为 R^3 的一组基, 并求 A 在这组基下的矩阵.

汕头大学 2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

七、(10分) 设 A, B 为 R 上 $n \times n$ 矩阵。证明: AB 与 BA 有相同的特征值。

八、(20分) 证明:
$$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x + a_{n-1} \end{bmatrix}$$
 的行列式等于 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} +$

$\cdots + a_1x + a_0$.