

汕头大学 2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：612

科目名称：数学分析

适用专业：数学

考生须知

答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不得分！请用黑色字迹签字笔作答，答题要写清题号，不必抄原题。

一、(15分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

二、(15分) 计算不定积分 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$.

三、(15分) 计算定积分 $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}} dx$.

四、(15分) 求极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$.

五、(15分) 设 $u(x,y,z) = e^{xyz}$, 求 $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

六、(10分) 设函数 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有二阶连续导数和 $f(0) = 0$. 证明由

$$g(0) = f'(0), \quad g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad (x \neq 0)$$

定义的函数 g 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有连续导数.

七、(10分) 计算二重积分 $\iint_D |\sin(x-y)| d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y \leq 2\pi\}$.

八、(10分) 求函数 $f(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ 上的最大值, 其中 $r > 0$.

九、(10分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$ 的和函数.

十、(10分) 将函数 $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$, 展开成傅里叶级数, 并利用展开式求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

汕头大学 2019 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

十一、(10 分) 计算曲线积分 $\int_L (e^x \sin y - y)dx + (e^x \cos y - 1)dy$, 其中曲线 L 为由 $A(a,0)$ 至点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$, 其中 $a > 0$.

十二、(5 分) 设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a . 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

十三、(5 分) 设 f 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个连续周期函数, 周期为 p , 其中 $p > 0$. 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{p} \int_0^p f(t)dt$.

十四、(5 分) 设 f 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数并且存在 $K \in (0,1)$ 使得对任意的 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 有 $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. 再设 $x_1 \in (-\infty, +\infty)$, $x_{n+1} = f(x_n)$ ($n=1,2,\dots$). 证明存在 $a \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 和 $f(a) = a$.