

东华理工大学 2018 年硕士生入学考试初试试题

科目代码： 818 ； 科目名称： 《高等代数》； (A 卷)

适用专业（领域）名称： 070100 数学

一、（本题 15 分）

设 $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$, $g(x) = (f(x) + x^n)^2 - x^n$, 证明: $f(x) | g(x)$.

二、（本题 20 分）

设 $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$, 且 α, β, γ 是 $f(x)$ 的根, 求一个整系数多项式, 使其以 $g(\alpha), g(\beta), g(\gamma)$ 为根。

三、（本题 15 分）

设 a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个实数, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 + 1 & a_1 a_2 + 1 & \dots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 + 1 & \dots & a_2 a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \dots & a_n^2 + 1 \end{pmatrix}$$

计算行列式 $|A|$.

四、（本题 15 分）

设 A, B 为 3 阶矩阵, $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 计算 $|A + B^{-1}|$.

五、（本题 15 分）

设 3 阶实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & -1 & ax - y \\ 1 & a & x + ay \\ b & c & bx + cy \end{pmatrix}$, 求 A 的秩。

六、（本题 25 分）

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$ 有 3 个线性无关的解,

(1) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$;

(2) 求 a, b 的值及方程组的通解。

七、(本题 10 分)

设 $A, E-A, E-A^{-1}$ 均可逆，证明： $(E-A)^{-1} + (E-A^{-1})^{-1} = E$.

八、(本题 15 分)

设 A 为 n 阶方阵， $|A|=18$ ， $3A+A^*=15E$ ，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵

- (1) 求 A 的一个零化多项式；
- (2) 求 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ ；
- (3) 求 A 的若当标准形。

九、(本题 20 分)

设 W, W_1, W_2 是线性空间 V 的 3 个子空间， $V = W_1 \oplus W_2$ ，若 $W_1 \subseteq W$ ，证明：

$$\dim W = \dim W_1 + \dim(W_2 \cap W) .$$