东华理工大学 2018 年硕士生入学考试初试试题

科目代码：601；科目名称：《高等数学》；（ A 卷）

适用专业（领域）名称：化学、电路与系统、计算机科学与技术、环境科学与工程

一、选择题：（共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1．数列极限 $J=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\cos t}{t^2}dt=$ （　　）

（A）0.　　（B）1.　　（C）∞.　　（D）$\frac{1}{2}$.

2．设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)=f(b)$,但$f(x)$不恒为常数,则在(a,b)内 （　　）

（A）既有极大值又有极小值.　　（B）至少存在一点ξ,使$f'(\xi)=0$.

（C）必有最大值或最小值.　　（D） 既有最大值又有最小值.

3．设 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1, & x\le 0\\ e^x+b\sin x^2, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处二阶导数存在，则常数 a,b 分别是 （　　）

（A） $a=1,\quad b=1$　（B） $a=1,\quad b=\frac{1}{2}$　（C） $a=1,\quad b=2$　（D） $a=2,\quad b=1$

4．设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数且 $f(x,y)(ydx+xdy)$ 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，则下列等式成立的是 （　　）

（A） $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$　（B） $x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$　（C） $-x\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial y}$　（D） $x\frac{\partial f}{\partial y}=y\frac{\partial f}{\partial x}$

5．下列反常积分

① $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+3}$.　② $\int_0^{+\infty}(e^{-x}+\frac{x}{1+x^2})dx$.　③ $\int_0^{+\infty}x^3e^{-x^2}dx$.　④ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$.

中收敛的是 （　　）

（A）①②　（B）①③　（C）②④　（D）③④.

6． 设 D 是由直线 $x=0,y=0,x+y=1$ 在第一象限所围成的平面区域，则 $J=\iint\limits_D e^{(x+y)^2}d\sigma=$ （　　）

（A） $e+1$　（B） $e-1$　（C） $\frac{e+1}{2}$　（D） $\frac{e-1}{2}$

7. 设 $f(x)=\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+\sin^2 t)}{t}dt$，$g(x)=\int_0^{1-\cos x}\tan t^2 dt$，则 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）

（A）高阶无穷小.（B）低阶无穷小. （C）同阶而非等价无穷小.（D）等价无穷小.

8．微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的待定特解形式为（　　）

（A）$(Ax+B)e^x$　（B）Axe^x　（C）Ax^2e^x　（D）$x(Ax+B)e^x$

二、填空题：（共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9．$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________ .

10．微分方程 $(3y-2x)dy=ydx$ 的通解是________________________ .

11．设 $f(x,y)=\int_{\frac{y}{x}}^{x^2+y^2}e^{t^2}dt$，则 $df(x,y)=$________________________________ .

12．已知 $\dfrac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 当 $x>0$ 的一个原函数，则

$\int x^2 f'(x)dx=$____________________ .　　.

13．设 D 是以点 $A(1,1), B(-1,1), C(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，则

$I=\iint\limits_D[\sqrt{1+2x^2+3y^2}\sin(xy)+4]dxdy=$ _________ .

14．曲线 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3\end{cases}$，在 $t=2$ 处的切线方程为_________________.

三、解答题：（共 8 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

15．（本题满分 12 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2nx+x^2}{2n^2}\right)^{-n}, & x\neq 0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n+n)^2}\right], & x=0,\end{cases}$　求 $f(x)$.

16．（本题满分 12 分）

求累次积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx$.

17．（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续，且有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[f(x+1)+1+3\sin^2 x]}{\sqrt{1-x^2}-1}=-4.$

（1）求 $f(1),\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)}{x^2}$ 及 $f'(1)$；　（2）若又设 $f''(1)$ 存在，求 $f''(1)$.

18．（本题满分 12 分）

设$z=f(xy,\dfrac{x}{y})$，f 二阶连续可微，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

19．（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$. 试证：存在$\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

20．（本题满分 10 分）

证明：$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x} \quad (x>0)$.

21．（本题满分 12 分）

设非负函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上满足 $x\,f'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$, 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$ 及坐标轴所围图形面积为 2 ,

（1）求函数 $f(x)$;

（2）a 为何值时, 所围图形绕 x 轴一周所得旋转体体积最小?

22．（本题满分 12 分）

设可微函数 $f(x)>0$ 满足 $f(x)=e^{ax}+\int_0^x e^{a(x^2-t^2)}f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 所满足的微分方程.