



2019 年全国硕士研究生招生考试初试试题

【B】卷

科目代码：601

科目名称：数学分析

考生须知

1. 答案须写在答题纸密封线内，写在试题卷、草稿纸等均视为无效。
2. 答题时一律使用蓝或黑色钢笔、签字笔书写。
3. 交卷时，请本人将答题纸放入试题袋内，密封后在封条与试卷袋骑缝处亲笔签名。

一、求下列极限。（每小题 10 分，共 2 小题，共 20 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ 。

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ 。

二、(15 分) 证明函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 连续且偏导数存在，但

在此点不可微。

三、(15 分) 设 f 为 $[a, b]$ 上二阶可导函数， $f(a) = f(b) = 0$ ，并存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) > 0$ ，证明至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) < 0$ 。

四、(15 分) 求两个椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 所围公共部分面积。

五、计算下列积分。（共 2 小题，共 25 分）

1. (10 分) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ 。

2. (15 分) $\int_0^1 x f''(2x) dx$ ，其中 $f(0) = 1, f(2) = 5, f'(2) = 5$ 。

六、(15 分) 设 $f(x)$ 为 $[a, +\infty)$ 上一致连续， $g(x)$ 为 $[a, +\infty)$ 上连续， $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - g(x)) = 0$ ，证明 $g(x)$ 为 $[a, +\infty)$ 上一致连续。



七、(15分) 设级数 $\sum a_n^2$ 收敛, 证明 $\sum \frac{a_n}{n}$ ($a_n > 0$) 也收敛。

八、(15分) 计算 $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, 其中 S 为球面

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, 并取外侧为正。

九、(15分) 证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$ 的任一切平面都过某个定点, 其中 f 是连续可微函数。