

长沙理工大学

2019 年硕士研究生复试考试试题

考试科目：实变函数

考试科目代码：F1001

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一、判断题（你认为对的请记√，你认为错的请记×，每小题 3 分，共 30 分）

1、 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid x \in E, f(x) > a + \frac{1}{n}\} = E[f \leq a]$; ()

2、无限多个可数集的并仍为可数集; ()

3、设 E 是一个有界的无限集，则 E 至少有一个收敛子列; ()

4、直线上开集中的任意一点必包含一个构成区间中; ()

5、如果 E 为可测集，则 E 的余集 E^C 必为可测集; ()

6、若 E 为可测集，则必有 E 的测度大于零，即： $mE \neq 0$; ()

7、设 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f ，则 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f ; ()

8、若函数列 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f ，且 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 g ，则对于任意的 $x \in E$ ，都有 $f(x) = g(x)$; ()

9、设 $f(x), g(x)$ 是可测集 $E (\subseteq R^n)$ 上的非负可测函数且 $\int_E f(x) dx = \int_E g(x) dx$ ，则必有 $f(x) = g(x)$ 在 E 中几乎处处成立; ()

10、设 E 是非空的零测集，即 $mE = 0$ ， $f(x)$ 是定义在 E 上的非负可测函数，则有 $\int_E f(x) dx = 0$. ()

二、计算题(每小题 10 分，共 20 分)

1、试求一个从 $(-1, 1)$ 到 $(-\infty, +\infty)$ 的一一映射，并写出该映射对应的解析表达式。

2、设 $A_{2n-1} = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $A_{2n} = (0, n)$, $n = 1, 2, \dots$. 求 $\varliminf A_n$ 及 $\overline{\varliminf A_n}$.

三、证明题(1、2 小题每题 10 分, 3、4 小题每题 15 分, 共 50 分).

1、证明: 若直线上点集 E 是闭集, F 是开集, 则 F 与 E 的差集为开集, 即 $F - E$ 为开集.

2、试证明若集 E 满足 $m^*E = 0$, 即 E 的外测度是零, 则 E 必可测.

3、设 $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n \ln x$, 证明

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n)^2} .$$

4、设 E 是 R^n 上的可测集, 且 $f = 0$ a.e 于 E 中, 试证明

$$\int_E f(x) dx = 0 .$$