长沙理工大学

2019年硕士研究生入学考试试题

考试科目：高等数学C（一）　　　　考试科目代码：603

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n=$________.

2. $y=2x^3-6x^2-18x+7$的极大值为________.

3. $d(e^{3x+2})=$____________.

4. 若$\int_0^{+\infty} ae^{-\sqrt{x}}dx=1$，则$a=$_____.

5. 设$f(x)$在$x=x_0$处可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-3\sin x)-f(x_0)}{2x}=1$，则$f'(x_0)=$________.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 下列极限中，不正确的是（　）.

A. $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$　　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{2})^{\frac{1}{x}}=0$

C. $\lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4$　　　D. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x}=0$

2. 已知函数$f(x)$可导，且$f(\frac{x}{1-x})=x$，则$f'(0)=$（　）

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. 0

3. 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，则（　）

A. 存在$\theta\in(0,1)$，有$f(b)-f(a)=f'(\theta(b-a))(b-a)$.

B. 存在$\theta\in(0,1)$，有$f(a)-f(b)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$.

C. 存在$\theta\in(a,b)$，有$f(a)-f(b)=f'(\theta)(a-b)$.

D. 存在$\theta\in(a,b)$，有$f(b)-f(a)=f'(\theta)(a-b)$.

4. 设$F(x)=\dfrac{x}{x-2}\int_2^x f(t)dt$，其中$f(x)$是连续函数，则$\lim\limits_{x\to 2}F(x)=($　$)$

A. 0　　B. 2　　C. $2f(2)$　　D. $f(2)$

5. 设$f(x)$为可导函数，则（　）

A. $\int f'(x)dx=f(x)$　　B. $\int df(x)=f(x)$

C. $d(\int f(x)dx)=f(x)$　　D. $\dfrac{d\int f(x)dx}{dx}=f(x)$

三、计算题（每小题 10 分，共 80 分）

1. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

2. 计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$.

3. 设$f(x)=\begin{cases}\arctan x & ,\ x<0\\ e^x-1 & ,\ x\geq 0\end{cases}$，求$f'(x)$.

4. 函数$y=y(x)$由方程$\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$确定，求$\dfrac{dy}{dx}$.

5. 求不定积分$\int\tan^2 x\sec^4 x dx$.

6. 求定积分$\int_0^1 xe^{-x}dx$.

7\. 曲线C的参数方程是$\begin{cases} x = e^t - e^{-t} \\ y = \left(e^t + e^{-t}\right)^2 \end{cases}$，求曲线$C$上对应于$t = \ln 2$的点的切线方程.

8\. 求由下列各曲线所围成的图形的面积：$y = \frac{1}{2}x^2$与$x^2 + y^2 = 8$（两部分都要计算）.

四、证明题（每小题 15 分，共 30 分）

1\. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x) > 0$，$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$，$x \in [a,b]$，

证明：（1）$F'(x) \geq 2$；

（2）方程$F(x) = 0$在区间(a,b)内有且仅有一个根.

2\. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{e}$，证明：在$(0,1)$内至少存在一点$\xi$，使得$f'(\xi) = -e^{-\xi}$.