

长沙理工大学

2019 年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 量子力学

考试科目代码： 838

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一、简答题（每小题 15 分，共 45 分）

1. 什么是波函数？它满足哪三个条件？
2. 什么是全同粒子，全同粒子的波函数满足什么条件？
3. 三个泡利矩阵为 $\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, 它们两两之间的对易关系如何？

二、证明题（每小题 15 分，共 45 分）

1. $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ 是三个算符，证明等式 $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$, 并利用该等式求 $[\hat{X}^2, \hat{P}_x]$, 其中 \hat{X} , \hat{P}_x 分别是坐标算符（ x 分量）和动量算符（ x 分量）。

2. 已知氢原子基态的波函数为 $\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$, 证明基态氢原子势能

$$V(\hat{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hat{r}} \text{ 的平均值为 } \langle V(\hat{r}) \rangle = -\frac{e^2}{4\epsilon_0 a_0}.$$

3. 设 $|n\rangle$ 为一维谐振子的能量本征态，谐振子湮灭算符 \hat{a} 对 $|n\rangle$ 的作用是

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \text{ 证明一维谐振子相干态 } |\beta\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \text{ 是湮灭算符 } \hat{a} \text{ 的本征态,}$$

相应的本征值是 β 。

三、计算题（每小题 20 分，共 60 分）

1. 设氢原子处于态 $\psi(r, \theta, \varphi) = c_1 R_{21}(r) Y_{10}(\theta, \varphi) + c_2 R_{21}(r) Y_{1-1}(\theta, \varphi)$, $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, 求 (1) \hat{L}_z 可能的取值及其相应的几率, \hat{L}_z 的平均值; (2) \hat{L}^2 的可能值及相应的几率, \hat{L}^2 的平均值。

2. 求算符 $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 的本征值和相应的归一化本征态。

3. 一个两能级系统, 未受微扰作用时哈密顿量 \hat{H}_0 有两个非简并能级 E_1^0 和 E_2^0 , 现受到微扰 \hat{H}' 的作用, 在 H_0 表象中, 系统的哈密顿量的矩阵形式为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}' = \begin{pmatrix} E_1^0 + a & b \\ b & E_2^0 + a \end{pmatrix}$$
, a, b 都是实数, 且远远小于 $|E_1^0 - E_2^0|$ 。用微扰公式计算出能量 (到二级近似)。