长沙理工大学

2019 年硕士研究生入学考试试题(A 卷)

考试科目：数学物理方程　　考试科目代码：813

注意：所有答案（含选择题、判断题、作图题等）一律答在答题纸上；写在试题纸上或其他地点一律不给分。作图题可以在原试题图上作答，然后将图撕下来贴在答题纸上相应位置。

一、填空题（共 4 题，每小题 5 分，共 20 分）

1、边界条件 $\left.\left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\right|_s = f$ 是第（__________）类边界条件，其中S为边界。

2、三维热传导齐次方程的一般形式是（__________）。

3、方程 $\frac{\partial u}{\partial t}-3\frac{\partial u}{\partial x}=0$ 的通解是：（__________）。

4、设函数 $u(x,t)$ 的傅立叶变换式为 $U(\omega,t)$，则方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的傅立叶变换为（__________）。

二、选择题（4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

5、方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的一个解是（______）

(A) $u(x,y)=e^x\sin xy$　　(B) $u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

(C) $u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　　(D) $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$

6、单位半径的圆板的热传导混合问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) & (\rho<1)\\ u(1,t)=0,\quad |u(\rho,t)|<M、\quad u(\rho,0)=f(\rho)\end{cases}$$

有形如（______）的级数解。

(A) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2\beta_n^2 t}\sin\beta_n\rho$.　(B) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2\beta_n^2 t}\cos\beta_n\rho$

(C) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2\beta_n^2 t}J_0(\beta_n\rho)$　(D) $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2\beta_n^2 t}J_n(\beta_n\rho)$

7、一细杆中每点都在发散热量，其热流密度为 $F(x,t)$，热传导系数为 k，侧面绝热，体密度为 ρ，比热为 c，则热传导方程是（______）

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(x,t)}{c\rho}$　　(B) $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{F(x,t)}{c\rho}$

(C) $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{u(x,t)}{c\rho}$　　(D) $\frac{\partial F}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{u(x,t)}{c\rho}$　　（其中 $a^2=\frac{k}{c\rho}$）

8、微分方程 $u_{xxx}+u_{xyy}-\sin u=\ln(1+x^2)$ 是（________）

(A) 三阶线性偏微分方程　　(B) 三阶非线性偏微分方程

(C) 三阶线性齐次常微分方程　　(D) 三阶非线性常微分方程

三、简答题（2 小题，每小题 10 共 20 分）

9、什么是数学物理方程的定解条件？什么样的定解问题是合理的（即什么是定解问题的适定性）？

10、写出二阶线性偏微分方程的①一般形式、②分类、③各类的标准形式。

四、计算题（4 小题，共 90 分）

11、判别下列偏微分方程的型式，并化为标准方程(典型型式)（20 分）：

$$x^2u_{xx}+2xyu_{xy}+y^2u_{yy}+xu_x+yu_y=0$$

12、细杆（或弹簧）受某种外界原因而产生纵向振动，以 $u(x,t)$表示静止时在 x 点处的点在时刻 t 离开原来位置的偏移，假设振动过程发生的张力服从虎克定律，试证 $u(x,t)$满足下列方程。其中 ρ 为杆的密度，E 为杨氏模量（20 分）。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

13、试用分离变量法求以下定解问题（25 分）：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=2^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+16, 0<x<2, t>0\\ u\big|_{x=0}=0, \qquad u\big|_{x=2}=8,\\ u\big|_{t=0}=\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, 0<x<2\end{cases}$$

14、求解平面波动方程的柯西问题（25 分）：

$$\begin{cases}u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)\\ u\,|_{t=0}=x^2(x+y) \qquad u_t\,|_{t=0}=0\end{cases}$$

（二维波动方程柯西问题的泊松公式：

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^{m}}\frac{\varphi(\zeta,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\zeta-x)^2-(\eta-y)^2}}d\zeta d\eta+\iint\limits_{\Sigma_{at}^{m}}\frac{\psi(\zeta,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(\zeta-x)^2-(\eta-y)^2}}d\zeta d\eta\right\}）$$